Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 31. Okt., WS 2008/09
Abgabe: 7. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1: Die Formel von Leibniz à la "Binomi"

Aus der Schule ist Ihnen wahrscheinlich die Produktregel der Differentialrechnung bekannt. Die Struktur der (allgemeinen) Binomischen Formel, welche in der Vorlesung bewiesen wurde, ergibt sich auch bei der Verallgemeinerung der Produktregel für den Fall von Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Diese sogenannte *Leibnizsche Formel* soll hier in einem abstrakten Kontext analog zur Binomischen Formel nachgewiesen werden.

Die Menge $\mathcal{A}$ sei mit zwei inneren Verknüpfungen ausgestattet, einer Addition "+" und einer Multiplikation "·". Um unübersichtliche Klammerungen möglichst zu vermeiden, sei die Multiplikation in üblicher Weise stärker bindend als die Addition. Ferner sei $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine Selbstabbildung von $\mathcal{A}$ mit den beiden folgenden Eigenschaften für alle $a, b \in \mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rclr} D(a+b) & = & Da + Db & \text{(Summenregel)} \\ D(a \cdot b) & = & Da \cdot b + a \cdot Db & \text{(Produktregel)} \end{array}$$

Weisen Sie per vollständiger Induktion die folgende Identität für $a, b \in \mathcal{A}$ nach

$$D^n(a \cdot b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k a \;\cdot\; D^{n-k} b,$$

wobei D^n die n-fache Hintereinanderausführung von D bezeichne.
In welcher Weise ließe sich die Produktregel außerdem verallgemeinern?

Aufgabe 2.2: Altbekannte Rechenregeln?

In der Schule werden viele Rechenregeln gelernt und verwendet, ohne sich um das *Warum* zu kümmern. Zwar läßt sich die eine oder andere Regel anschaulich motivieren (z.B. die Faustregel *Minus Minus ergibt Plus*, da es *de facto* gleich ist, ob jemandem Schulden erlässen werden oder er Geld erhält, um diese zu tilgen), dennoch wird man schnell auf Schwierigkeiten bei einer tieferen Begründung stoßen. Die Körper- und Anordnungsaxiome der reellen Zahlen bieten eine Möglichkeit, dieses "mulmige Gefühl" abzubauen oder zumindest deutlich zu verringern. Aus wenigen Aussagen (Axiomen), die intuitiv richtig erscheinen und (zunächst) nicht zu hinterfragen sind, sollen so viele Rechenregeln wie möglich durch logisches Schlußfolgern abgeleitet werden.

Beweisen Sie die folgenden (Un-)Gleichungen für reelle Zahlen unter genauer Angabe der Umformumgsschritte bzw. der verwendeten Körper- und Anordnungsaxiome:

i) $x + (-y) = x - y$ (Plus Minus gleich Minus)

ii) $x - (-y) = x + y$ (Minus Minus gleich Plus)

iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ (Minus mal Minus gleich Plus mal Plus)

iv) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (Durch einen Bruch teilen heißt mit seinem Kehrwert malnehmen)

v) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ (Additionsgesetz der Bruchrechnung, **nicht** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$!)

vi) $a < b \quad \wedge \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$ (Addition von Ungleichungen)

vii) $x < y \quad \Rightarrow \quad -x > -y$ (Umdrehen der Ungleichung bei Multiplikation mit -1)

viii) $0 \leq x \cdot x = x^2$ (Quadrate sind stets nicht-negativ)

ix) $0 < x \quad \Rightarrow \quad 0 < x^{-1}$ (Konstanz des Vorzeichens bei Kehrwertbildung)

x) $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < y^{-1} < x^{-1}$ (Umdrehen der Ungleichung bei Kehrwertbildung)

Zeigen Sie, daß aus viii) die konkrete Ungleichung $0 < 1$ folgt. Beweisen Sie abschließend die für viele Schülergenerationen "verhängnisvolle" Ungleichung der Bruchrechnung

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \,,$$

wobei anzunehmen ist, daß $a, b, c, d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Aufgabe 2.3: Rechnen mit Beträgen

a) Beweisen Sie die folgende Ungleichung für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$$

b) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem alle Punkte, deren Koordinaten (x, y) der folgenden Ungleichung genügen:

$$\big| 2x - |x + y - 2| \big| < 2$$

Aufgabe 2.4: Unterkörper gesucht!

Bekanntlich stellt die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Additions- und Multiplikationsverknüpfung einen Körper dar. Bestimmen Sie alle Unterkörper von $\mathbb{Q}$.

Zusatzaufgabe: Konsequenz einer falschen Annahme

Auch aus einer falschen Annahme kann man in richtiger Weise schlußfolgern. Über den Wahrheitsgehalt der schlußgefolgerten (implizierten) Aussage kann man *a priori* nicht entscheiden, d.h. sie kann entweder wahr oder falsch sein.
Welche reelle Zahl müßte die größte sein, unter der (falschen) Annahme, daß eine größte reelle Zahl existiert?