Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 21. Nov., WS 2008/09
Abgabe: 28. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1: Grenzwertbestimmung

Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (1 - \frac{1}{n})^n$ monoton wachsend und konvergent ist. Weisen Sie sodann nach, daß ihr Grenzwert durch e^{-1} gegeben ist. Dabei ist e die (in der Vorlesung) über die Exponentialreihe definierte *Eulersche Zahl* (Basis der Exponentialfunktion bzw. des natürlichen Logarithmus).

Aufgabe 5.2: Verdichtungskriterium mit Anwendung

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen. Zeigen Sie, daß $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_n$ genau dann konvergiert, wenn $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}\right)_n$ konvergiert.

b) Nutzen Sie a), um zu beweisen, daß $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}\right)_n$ für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.

Aufgabe 5.3: Konvergent oder divergent?

Lassen Sie Ihre Meinung über die (absolute) Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihen mittels einer fundierten Begründung "konvergieren":

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha \alpha^n \quad$ für $\alpha \geq 0$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Aufgabe 5.4: Verallgemeinerung des Leibnizkriteriums

a) Es sei $(p_n)_n$ eine Nullfolge positiver Zahlen mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$. Zeigen Sie, daß es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge von "Vorzeichen" $(s_n)_n$ mit $s_n \in \{-1, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n = x.$$

b) Formulieren Sie eine Vermutung, welche die obige Aussage auf komplexwertige Nullfolgen verallgemeinert. **Hinweis:** Es wird nicht verlangt, daß Sie Ihre Vermutung beweisen; allerdings sollten Sie Ihre Vermutung ggf. unter Zuhilfenahme weitere sinnvoller Annahmen plausibel machen können.

Aufgabe 5.5: Wer findet die schönste ~~Weihnachtskugel~~ Einheitskugel?

Welche Möglichkeiten bestehen, aus bekannten Normen (im $\mathbb{R}^2$) durch Kombination weitere Normen zu definieren. Versuchen Sie Normen mit möglichst "interessanten" Einheitskugeln zu konstruieren. Gelingt es Ihnen, eine Norm mit sternförmiger Einheitskugel anzugeben?