Universität Konstanz
FB Mathematik und Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

WS 2008/09
Ausgabe: 16. 1. 2009
Abgabe: 23. 1. 2009, 10 Uhr

Analysis I

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1: Beispiele für Ableitungen

Untersuchen Sie, an welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen differenzierbar sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(x_0)$.

(i) $f_1 \colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x$,

(ii) $f_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos(\sin(x^2))$,

(iii) $f_3 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x|x|$,

(iv) $f_4 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Aufgabe 10.2: Zum Mittelwertsatz

Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) \neq 0$. Mit einer positiven Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gelte $f'(x) > \frac{1}{c}$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f zwischen 0 und $-cf(0)$ genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 10.3: Ein Trennungssatz für Nullstellen

Die Funktionen f und g seien im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar. Für alle $x \in I$ gelte

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0.$$

Beweisen Sie: Zwischen zwei Nullstellen von f liegt eine Nullstelle von g.

Aufgabe 10.4:

Die Funktion f sei im Intervall (a, b) mit $0 \in (a, b)$ differenzierbar und es gelte $f(0) = 0$. Die Funktion g sei in (a, b) definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ f'(0) & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie

(i) Die Funktion g ist stetig in (a, b).

(ii) Existiert $f''(0)$, so ist g differenzierbar in (a, b).

(iii) Existiert $f''(x)$ in (a, b) und ist f'' stetig an $x_0 = 0$, so ist g stetig differenzierbar in (a, b).