



Analysis I

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1: Berechnung von Integralen

Bestimme die Definitionsbereiche und Stammfunktionen von

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x \mapsto \tan x, & \text{b) } x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}, \\ \text{c) } x \mapsto \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}, & \text{d) } x \mapsto (\ln x)^2. \end{array}$$

Aufgabe 11.2: Zum Beweis von Satz 8.12 der Vorlesung

Seien X ein normierter Vektorraum und $T: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Die Abbildung T heißt beschränkt, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert mit $|T(x)| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$. Man zeige, dass T genau dann stetig ist, wenn T beschränkt ist. (Tipp: Beide Eigenschaften sind äquivalent zur Stetigkeit von T an der Stelle $0 \in X$.)

Aufgabe 11.3: Regelfunktionen als Grenzwerte von Stufenfunktionen

a) Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{für } -\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Finden Sie eine Folge von Treppenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

b) Die Funktion f sei für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie: f ist in $[0, 1]$ eine Regelfunktion.

Zusatzaufgabe zu a) (freiwillig): Berechnen Sie $\int_{-1}^1 f(x) dx$.