Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 24. Okt., WS 2008/09
Abgabe: 31. Okt. bis 10 Uhr

Analysis I

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1: Von Bildern und Urbildern

Es seien X, X' Mengen und $f\colon X \longrightarrow X'$ eine Abbildung. Ferner seien $A, B \subset X$ und $A', B' \subset X'$ Teilmengen. Zeigen Sie folgenden Inklusionen:

a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

b) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$,

c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

Überzeugen Sie sich davon, dass die Gleichheit in a) und b) im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 1.2: Charaketerisierung injektiver Abbildungen

Seien X, X' Mengen und $f\colon X \longrightarrow X'$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist injektiv.

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.

c) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.

Aufgabe 1.3: Verkettungen von Abbildungen

a) Gegeben seien Mengen A, B, C sowie bijektive Abbildungen $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung $g \circ f\colon A \longrightarrow C$ ebenfalls bijektiv ist mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

b) Seien A und B nichtleere Mengen, sowie $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Zeigen Sie, dass dann f injektiv und g surjektiv ist.

Aufgabe 1.4: Potenzsummen per Induktion

Die Beweismethode der Vollständigen Induktion ist ein mächtiges Instrument, wenn es darum geht, Aussagen zu beweisen, die durch natürliche Zahlen $n \in \{n_{\min}, n_{\min}+1, ..., n_{\max}-1, n_{\max}\} \subset \mathbb{N}$ parametrisiert sind. Beachte, dass $n_{\max}$ nicht existieren muss (Fortsetzung *ad infinitum*); ebenso kann ein Induktionsbeweis je nach Kontext auch "absteigend" verlaufen, d.h. man startet bei einem $n_{\max}$ und "hangelt" sich dann runter statt rauf. Das Prinzip der vollständigen Induktion läss t sich schön an einer Reihe aufgestellter Dominosteine veranschaulichen. Ist man in der Lage, den ersten Stein der Dominokette umzuwerfen (Induktionsanfang), so werden alle Steine umfallen, falls sichergestellt ist, dass jeder Stein seinen Nachfolger mitreißt.
Leider ist die Vollständige Induktion *nicht* dazu nütze, ein mathematisches Ergebnis zu finden; dazu bedarf es anderer Ideen. Ist man aber bei einer sinnvollen Vermutung angelangt, so verläuft der Beweis per Induktion oftmals mechanisch (leider auch nicht immer!). Diesen Effekt können Sie am eigenen Leib erleben, wenn Sie den Aufgabenteil b) ohne zu schummeln bearbeiten. Dass man nebenbei mit "kreativer", vermeintlicher Induktion auch einigen verblüffenden Unfug anstellen kann, erfahren Sie umseitig (Aufgabe zum Schmunzeln).

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Summenformeln:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} & \sum_{k=1}^{n} k & = \frac{1}{2}n(n+1) & = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \\ \text{ii)} & \sum_{k=1}^{n} k^2 & = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) & = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \end{array}$$

Beweisen Sie ii) analog zu i) wie in der Vorlesung vorgeführt.

b) Versuchen Sie, eine analoge Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^3$ herzuleiten und anschließend durch Vollständige Induktion zu verifizieren.

Anleitung: Betrachten Sie die Summenformeln als Funktionen in n. Wie nennt man solche Funktionen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Exponenten von k und dem größten Exponenten von n, welcher auf der jeweiligen rechten Seite auftritt? Überlegen Sie sich einen Ansatz für die gesuchte Summenformel. Stellen Sie sodann ein Gleichungssystem auf, das es Ihnen ermöglicht, die unbekannten Koeffizienten in dem Ansatz zu bestimmen, und lösen Sie dieses. Falls Ihre Schulkenntnisse nicht ausreichen, um das betreffende Gleichungssystem zu lösen, dürfen Sie die gesuchte Formel nachschlagen (siehe z.B. Bronstein, diverse Analysis Lehrbücher etc.) und die Koeffizienten ablesen. Zeigen Sie in diesem Fall, dass die abgelesenen Koeffizienten tatsächlich eine Lösung des von Ihnen aufgestellten Gleichungssystems sind.

c) Beschreiben Sie kurz die Vorgehensweise, um sich die Summenformel für $\sum_{k=1}^{n} k^p$ (mit $p \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest) zu beschaffen. Erstaunt es Sie, dass die Vorgehensweise immer zum Ziel führt? Was könnte schiefgehen? (Bitte um kurze Stellungnahme; eine Vertiefung dieser Frage ist ggf. für eine spätere Aufgabe geplant.)

Zum Schmunzeln:

Falls Sie im Vorkurs noch keine Gelegenheit hatten, über die folgende Aufgabe nachzudenken, können Sie dies nun nachholen. Kommentieren Sie den Beweis von folgendem **Satz:** Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$)
Induktionsanfang $(n = 1)$*:* Es ist offensichtlich, daß in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.
Induktionsschritt $\big(n \geq 1,\ A(n) \Rightarrow A(n+1)\big)$*:* Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, daß bereits in jeder Menge von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n+1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die – aufgrund der Induktionsvoraussetzung – alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen.
Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Pferden nur Pferde derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Pferde dieselbe Farbe haben. $\square$

Allgemeiner Hinweis: Zu der Vorlesung Analysis I bzw. insbesondere zu den Übungen wird es eine Homepage geben, die Sie demnächst unter der folgenden Adresse aufrufen können: `http://www.math.uni-konstanz.de/~rheinlae` Klicken Sie auf *Lehre*, und dann in der Rubrik *Wintersemester 2008/09* auf *Analysis 1.* Da die Aufgabenblätter leider nur in Ausnahmefällen vervielfältigt werden können, wird das wöchentliche Aufgabenblatt als PDF-Dokument im Laufe eines jeden Freitags unter der oben angegebenen Adresse ins Internet gestellt. Bitte drucken Sie sich das Aufgabenblatt selbständig aus.
Die Abgabe der Lösungen erfolgt am darauffolgenden Freitag, wobei Sie ihre zusammengehefteten Ausarbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeordneten Kasten werfen, welcher sich gegenüber vom Dekanat befindet. Beachten Sie insbesondere die *Hinweise* und *Reglements*, welche das Bearbeiten der Übungsaufgaben anbetreffen (siehe Homepage).