Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 7. Nov., WS 2008/09
Abgabe: 14. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1: Italienisch für Mathematiker

In der Renaissance, als die stürmische mathematische Entwicklung der Neuzeit ihren Anfang nahm, war es *en vogue*, mathematische Resultate in Gedichtform zu verpacken und so mancher Student konnte wohl damit brillieren, diese auswendig zu rezitieren. Die klare, übersichtliche Formelsprache, die uns heute beinahe selbstverständlich erscheint, bildete sich erst im Laufe der Zeit heraus und ist sicherlich neben den eigentlichen mathematischen Erkenntnissen ebenfalls als eine große Kollektivleistung der Mathematiker zu betrachten. Das folgende Lehrgedicht stammt aus der 1572 erschienenen *L'Algebra* des italienischen Rechenmeisters Raffaele Bombelli (siehe z.B. Wikipedia).

Übersetzen Sie jede Zeile in eine mathematische Gleichung und überprüfen Sie deren Richtigkeit.

Più via più di meno fa più di meno,
Meno via più di meno fa meno di meno,
Più via meno di meno fa più di meno,
Meno via meno di meno fa più di meno,
Più di meno via più di meno fa meno,
Più di meno via meno di meno fa più,
Meno di meno via più di meno fa più,
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Übersetzungshilfen: *più* $= +1$, *meno*$=-1$, *più di meno* $= \mathrm{i}$, *meno di meno* $= -\mathrm{i}$, *via* = (hier) mal, *fa* von *fare* = machen, (hier) gleich sein

Aufgabe 3.2: Rechnen mit komplexen Zahlen

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Standardschreibweise (Realteil + i Imaginärteil) dar:

$$z_1 := (3+7\mathrm{i})(\tfrac{1}{3} - 3\mathrm{i}) \qquad z_2 := \frac{23+9\mathrm{i}}{6\mathrm{i}-3} \qquad z_3 := -\frac{1}{\mathrm{i}^{259}} \qquad z_4 := \frac{1}{(-\mathrm{i})^{259}} \qquad z_5 := (3-5\mathrm{i})^4$$

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für welche $z^2 - 4z + 8 = 0$ gilt.
Kurioses: Kommentieren Sie kurz die folgende Gleichungskette:

$$1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1.$$

Aufgabe 3.3: Die Zahlenebene als Körper

Im $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ werden für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ die folgenden Verknüpfungen definiert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &:= \big(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2\big), \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &:= \big(x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1\big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß der $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der obigen Addition und Multiplikation die Struktur eines Körpers erhält. Bestimmen Sie alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2 = (0, 1).$$

Welcher Zusammenhang ergibt sich zu den komplexen Zahlen (in der Standardnotation)?

Aufgabe 3.4: Zur Potenzmenge

Ist M eine Menge, so bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die *Potenzmenge* von M. Darunter wird die Menge aller Teilmengen von M verstanden.

a) Bestimmen Sie $\mathcal{P}\big(\{1, 2, 3, 4\}\big)$. Warum ist der Name Potenzmenge sinnvoll gewählt?

b) Unendliche Mengen bergen manche Überraschungen. So sind die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleich mächtig. Dies scheint der Intuition zunächst zu widersprechen, denn

$$\#\{-n, -n+1, ..., -1, 0, 1, ..., n-1, n\} = 2\,\#\{1, ..., n\} + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Demnach sollte $\mathbb{Z}$ praktisch doppelt soviele Elemente enthalten wie $\mathbb{N}$. Im Umgang mit unendlichen Mengen und Größen stellt sich daher die Frage, welche der gewohnten Regeln und Gesetzmäßigkeiten aus dem Endlichen übertragbar sind und wo es zu eklatanten Abweichungen kommt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Potenzmenge auch bei unendlichen Mengen im Sinne der Mächtigkeit (sehr viel) größer ist als die Menge selbst.

Es sei M eine nicht-leere Menge. Beweisen Sie, daß es keine *surjektive* Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$ gibt.

Hinweis: Der Gag besteht darin, diese Aussage allgemein, d.h. auch für unendliche Mengen M zu beweisen (warum?). Führen Sie dazu die Annahme der Existenz von f zu einem Widerspruch, indem Sie die Menge $A := \{m \in M : \; m \notin f(m)\}$ betrachten.

c) Die Menge aller Abbildungen zwischen zwei Mengen X und Y wird oftmals mit Y^X bezeichnet. Rechtfertigen Sie diese Notationsweise, indem Sie sich überlegen, wieviele Elemente Y^X enthält, wenn X und Y endlich sind.

d) Es sei M eine Menge und $2^M := \big\{f : M \to \{0, 1\}\big\}$ die Menge aller Abbildungen von M nach $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, daß die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und 2^M von gleicher Mächtigkeit sind, kurz $\mathcal{P}(M) \sim 2^M$, d.h. es besteht eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(M)$ und 2^M.