Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 14. Nov., WS 2008/09
Abgabe: 21. Nov. bis 10 Uhr

Analysis I

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.0: Was $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$ erbt

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ *vollständig* ist, d.h. dass jede Cauchyfolge konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ *separabel* ist, d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$, welche *dicht* in $\mathbb{C}$ liegt. Dabei heißt die Menge M dicht in $\mathbb{C}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jedem $z \in \mathbb{C}$ eine Zahl $m \in M$ existiert mit $|m - z| < \epsilon$.

Aufgabe 4.1: Mustererkennung

Geben Sie eine Formel an, mit der sich die Folgenglieder der Folge

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \ldots$$

direkt berechnen lassen.
Hinweis: Die folgenden Funktionen könnten dabei behilflich sein:

$$\text{floor} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} :\ n \leq x\}, \qquad \text{ceil} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{N} :\ x \leq n\}.$$

Aufgabe 4.2: Rekursiv definierte Folgen

a) Die Rekursionsvorschrift $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ definiert mit den Anfangsbedingungen $F_0 = a$ und $F_1 = b$ eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Leiten Sie eine Rekursionsbeziehung für die Teilfolge $(F_{3n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ her.

b) Geben Sie eine explizite Formel an, mit welcher sich die Folgenglieder der rekursiv definierten Folge

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

berechnen lassen.

Hinweis: Setzen Sie den Exponentialansatz $a_n := \lambda^n$ in die Rekursionsbeziehung ein und bestimmen Sie geeignete Werte für λ. Beachten Sie ferner: Sind $(A_n)_n$ und $(B_n)_n$ zwei Folgen, welcher der obigen Rekursionsvorschrift genügen, so erfüllt auch die Folge $(A_n + B_n)_n$ die Rekursionsvorschrift.

c) (freiwillig) Läßt sich auch eine Rekursionsvorschrift für die Folge $(F_n^3)_n$ finden, wobei die F_n's wie in a) definiert sind. ($b_{n+1} = 3b_n + 6b_{n-1} - 3b_{n-2} - b_{n-3}$)

Aufgabe 4.3: Diskussion zweier Folgen

a) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} 2x_{n+1} - x_n = x.$$

Hinweis: Um "$\Leftarrow$" zu beweisen, zeigen Sie zunächst, daß die Konvergenz der Folge $(2x_{n+1} - x_n)_n$ die Beschränktheit von $(x_n)_n$ impliziert. Führen Sie dann einen Widerspruchsbeweis durch.

b) Für $a > 0$ wird durch die Rekursionsvorschrift

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n^2 + a \quad \text{für } n \geq 0$$

eine Folge $(x_n)_n$ definiert. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an a, damit die Folge konvergiert. Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4.4: Teilreihen der harmonischen Reihe

a) Es sei $D \subset \mathbb{N}$ die Menge aller natürlicher Zahlen, welche durch 3 teilbar sind. Konvergiert dann $\sum_{n \in D} \frac{1}{n}$?

b) Es sei $N \subset \mathbb{N}$ die Menge aller natürlicher Zahlen, welche nicht die Ziffer 9 in ihrer Dezimaldarstellung enthalten. Ist die Summe $\sum_{n \in N} \frac{1}{n}$ endlich?

Wie immer sind die Antworten zu begründen.

Zur Kenntnisnahme: Über sup **und** inf

sup und inf sind für Mengen reeller Zahlen definiert. Es ergibt sich daher eine sehr natürliche Frage: Wie verhalten sich sup und inf im Zusammenspiel mit den allgemeinen Mengenoperationen $(\cup, \cap, \subset)$ und den arithmetischen Operationen $(+, -, \cdot, /)$, welche für Mengen reeller Zahlen ebenfalls definiert werden können z.B.: $A + B := \{a + b : \ a \in A, \ \ b \in B\}$. Welche Beziehungen sind Ihnen intuitiv klar?

Beispiel: $\inf\ A + \inf\ B = \inf(A + B)$.

Ein kleiner aber feiner Unterschied: Auch bei reellwertigen Funktionen sind inf und sup im Zusammenhang mit ihrem Wertebereich von Interesse. Warum gilt hier z.B. nur $\inf f(A) + \inf g(A) \leq \inf(f + g)(A)$?