Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 19. Dez., WS 2008/09
Abgabe: 09. Jan. bis 10 Uhr

# Analysis I

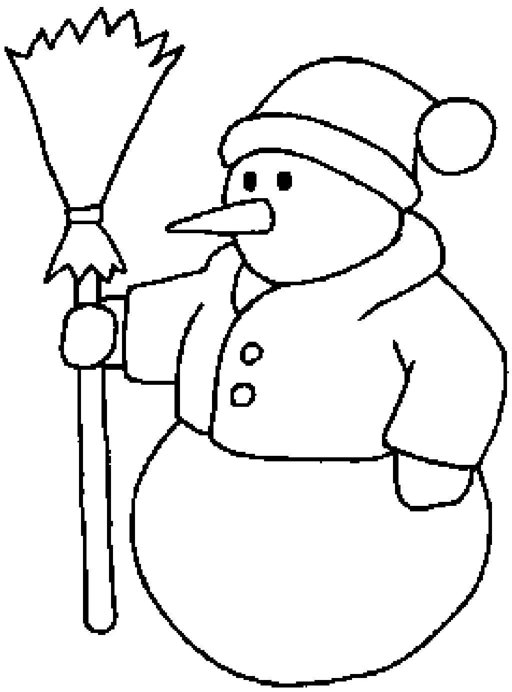
**Weihnachtsblatt (8. Übungsblatt)**

Diese Aufgaben sind Kür,
das Christkind legt sie vor die Tür.

**Da Weihnachten ein Fest der Freude ist, sollen Sie diese Aufgaben nur solange bearbeiten, wie Sie Freude daran haben! Frohe Feiertage und viel Spaß bei einer mathematischen Zeitreise in die Antike – jener großartigen Epoche der Menschheitsgeschichte, in der sich auch das Weihnachtsereignis abgespielt haben soll.**

## Aufgabe 8.0: Kreativ-Wettbewerb

Verleihen Sie dem Schneemann Farbe, indem Sie ihn ausmalen. Natürlich dürfen Sie ihn auch gerne ausschneiden und als Erinnerung an Ihre erste Analysis Vorlesung behalten.



Übrigens, die schönsten Schneemänner sollen nach der Weihnachtspause prämiert werden. Wer Spaß am Kreativ-Sein gefunden hat, kann sich darin versuchen, in einem möglichst ansprechenden Schaubild (Diagramm/Struktogramm) Inhalte der Vorlesung oder Übung darzustellen (z.B. Zusammenhang zwischen gewissen Definitionen und Sätzen zu einem bestimmten Thema, graphische Aufbereitung eines längeren Beweises etc.). Auch hier wird es – rege Beteiligung vorausgesetzt – eine kleine Prämierung geben.

## Aufgabe 8.1: Folgen mit dichten Quotienten

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge positiver Zahlen derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1.$$

Zeigen Sie, daß dann die Menge der Quotieneten

$$\left\{\frac{a_m}{a_n} :\ m\in\mathbb{N},\, n\in\mathbb{N}\right\}$$

*dicht* ist in $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Können Sie konkrete Folgen angeben, die den obigen Eigenschaften genügen?

# Klassische Approximationen des Altertums, Teil 1

Die Entdeckung der irrationalen Zahlen war für die antiken Mathematiker wie Pythagoras eine sehr schmerzhafte Erkenntnis. Zwar bereitet das formale Rechnen mit den reellen Zahlen keinerlei Probleme, weil die Axiome nicht zwischen rationalen und irrationalen Zahlen unterscheiden. Dennoch stellen uns irrationale Zahlen beim praktischen Gebrauch vor Schwierigkeiten. Da sie im wesentlichen nur über Gleichungen definiert sind, ist ihr Wert nicht unmittelbar ersichtlich. Ein Beispiel: Welche Zahl ist größer: $\sqrt[3]{2} + \sqrt[2]{3}$ oder $\sqrt[4]{5} + \sqrt[5]{4}$ ? Oder was ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$? Läßt sich diese Zahl auch einfacher schreiben? Das Problem besteht hier darin, daß es keine Zahl gibt, die sowohl $\sqrt{2}$ wie $\sqrt{3}$ als ganzzahliges Vielfaches hat; man spricht in diesem Zusammenhang von *Inkommensurabilität.* Diese Schwierigkeit tritt bei rationalen Zahlen nicht auf, denn zwei Brüche lassen sich immer auf einen gemeinsamen Nenner bringen und somit kann ihre Summe wieder als *ein* Bruch geschrieben werden. Man gelangt daher zu der Einsicht, daß es für das praktische Rechnen absolut notwendig ist, irrationale Zahlen durch rationale Zahlen, die sich viel leichter handhaben lassen, zu **approximieren** d.h. anzunähern.

**Definition:** Eine *Intervallschachtelung* (engl. nested intervals) ist eine Folge *abgeschlossener, beschränkter* Intervalle, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$, welche den folgenden Eigenschaften genügt:

1) (Inklusionseigenschaft) $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad I_{n+1} \subset I_n.$
2) (Kontraktionseigenschaft) $\forall\, \epsilon > 0 : \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad |I_n| := b_n - a_n < \epsilon.$

Das *Intervallschachtelungsprinzip* besagt, daß es genau eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist. Man überlege sich, daß das Intervallschachtelungsprinzip direkt aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, ja sogar dazu äquivalent ist.

## Aufgabe 8.2: Antikes Wurzelziehen mit dem arithmetisch-harmonischen Mittel

Der Standard-Existenzbeweis für die Quadratwurzel ist nicht *konstruktiv* in dem Sinne, daß er kein Rezept enthält, wie die Quadratwurzel systematisch (näherungsweise) berechnet werden kann. Derartige Beweise, die sich auf reine Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen beziehen, werden Ihnen im Laufe Ihres Studiums noch *en masse* begegnen. Übrigens gibt es eine Fraktion von Mathematikern (Konstruktivisten), die solchen Beweisen kritisch gegenüberstehen, da sie es vermeiden möchten, Existenzaussagen auf Axiome zu gründen, die letztlich einer gewissen Willkür unterliegen (z.B. das umstrittene Auswahlaxiom, zweiwertige Logik etc.).
Neben dem *Bisektionsalgorithmus* (siehe z.B. Wikipedia, Stichwort *Bisektion*) stellt die folgende Aufgabe ein Intervallschachtelungsverfahren vor, das eine gezielte Berechnung der Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit ermöglicht.

Es sei $0 < a < b$. Man definiere die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *rekursiv* durch $a_0 := a, b_0 := b$ sowie $a_{n+1} := H(a_n, b_n),\ b_{n+1} := A(a_n, b_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Hierbei bezeichnen $A$ bzw. $H$ das *arithmetische* bzw. *harmonische Mittel*, welche für zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert sind:

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2}, \qquad H(x,y) := \frac{1}{A(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})} = \frac{2xy}{x+y}.$$

Ihre Aufgabe ist es nun nachzuweisen, daß die beiden Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren, den man als das *arithmetisch-harmonische Mittel* bezeichnen könnte. Tatsächlich entpuppt sich dieses als das bekannte geometrische Mittel $G(a,b) := \sqrt{ab}$. Folgen Sie bei der Aufgabenbearbeitung den angegebenen Schritten:

a) Zeigen Sie, daß die Intervalle $I_k := [a_k, b_k]$ eine Intervallschachtelung bilden.

b) Folgern Sie daraus die Existenz von $\sqrt{ab}$. **Tip:** Was ist $a_n b_n$?

c) Berechnen Sie $\sqrt{5}$ bis zu einer Genauigkeit (Fehlertoleranz) von $10^{-3}$ sowohl mit dem Bisektionsalgorithmus (Startwerte 1 und 5) als auch mit dem vorgestellten Verfahren.

   **Erklärung:** Der tatsächliche Wert $x$ soll nicht mehr als $10^{-3}$ von Ihrem approximativen Wert $\tilde{x}$ abweichen, d.h. $x \in [\tilde{x} - 0.001, \tilde{x} + 0.001]$.

d) Welches Verfahren würden Sie subjektiv bevorzugen. Gibt es auch objektive Gründe?

# Klassische Approximationen des Altertums, Teil 2

Unter Verwendung des Abstandsbegriffs läßt sich ein Kreis (genauer die Kreislinie) leicht definieren: man versteht darunter die Menge aller Punkte, welche von einem gegebenen, festen Punkt (Mittelpunkt) gleichen, konstanten Abstand (Radius) besitzen. Ebenso einfach läßt sich auch die (abgeschlossene) Kreisfläche als die Menge aller Punkte charakterisieren, deren Abstand zum Mittelpunkt kleiner oder gleich dem Radius ist. Fragt man dagegen nach der Länge einer Kreislinie (Umfang) bzw. nach der eingeschlossenen Fläche, so fällt die Antwort deutlich schwieriger aus. Einfache Messungen zeigen bereits, daß der Umfang eines Kreises kein ganzzahliges Vielfaches seines Durchmessers (doppelter Radius) ist, wie dies beispielsweise beim Quadrat ($U = 4d$) oder beim regelmäßigen Sechseck ($U = 3d$) der Fall ist. Darüberhinaus gelingt es weder das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser, welches heute mit $\pi$ bezeichnet[1] wird, mittels rationaler Zahlen noch mit Wurzeln (ähnlich der Diagonale eines Qudrates) genau anzugeben. Zwar waren recht grobe Näherungswerte für $\pi$ durch Messungen sicherlich den Babyloniern und Ägypetern bekannt, doch ist es das Verdienst des *Archimedes von Syrakus*, als erster ein Verfahren angegeben zu haben, das unter Inkaufnahme eines anwachsenden Rechenaufwands die Bestimmung von $\pi$ mit beliebiger Genauigkeit ermöglicht (im Gegensatz zu Messungen, die selbst wenn man eine perfekte Kreislinie erzeugen könnte, eine gewisse Fehlertoleranz nicht unterschreiten.) Die Idee seines Verfahrens zur Berechnung des Kreisumfangs beruht darauf, die Kreislinie, durch regelmäßige Polygone (Vielecke) zu ersetzen, die sich immer enger an die gekrümmte Linie anschmiegen. Übrigens läßt sich der an sich simple Grundgedanke des Archimedischen Verfahrens heute in zahlreichen mathematischen Anwendungen verschiedenster Natur wiederfinden: Die Strategie besteht darin, ein Problem, das man nicht direkt zu lösen vermag, durch eine Folge einfacherer, lösbarer Probleme zu ersetzen, deren Lösungen die Lösung des Ausgangsproblems immer besser annähern (approximieren).

In der vorliegenden Aufgabe geht es um den Flächeninhalt des Kreises, der sich ebenfalls mit einer Folge von Polygonen näherungsweise berechnen läßt. Auch hier tritt $\pi$ als Proportionalitätsfaktor auf (allerdings ist *a priori* nicht klar, warum dies derselbe ist wie beim Kreisumfang!) Mehr zu Archimedes und der Kreiszahl $\pi$ erfahren sie ggf. in weiteren Aufgaben auf den kommenden Übungsblättern.

**Aufgabe 8.3: $\varkappa \acute{\upsilon} \chi \lambda o \upsilon \;\; \mu \acute{\varepsilon} \tau \rho \eta \sigma \iota \varsigma$ – Kreismessung (nach Archimedes)**

Es bedeute $f_n$ bzw. $F_n$ die Fläche des dem Einheitskreis *einbeschriebenen* bzw. *umschriebenen* regelmäßigen $n$-Ecks.

a) Zeigen Sie, daß sich $f_{2n}$ und $F_{2n}$ mit Hilfe des geometrischen und harmonischen Mittels $G, H$ (siehe Aufgabe 3, Blatt 2) in folgender Weise berechnen lassen:

$$f_{2n} = G(f_n, F_n), \qquad F_{2n} = H(f_{2n}, F_n).$$

Verwenden Sie bei der geometrischen Herleitung keine Winkelfunktionen sondern nur den Satz des Pythagoras und die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

b) Für ein festes $n \geq 3$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $\alpha_k := f_{2^k n}$ und $\beta_k := F_{2^k n}$. Die Folgen $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehorchen dann den Rekursionsbeziehungen

$$\alpha_{k+1} = G(\alpha_k, \beta_k) \qquad \text{und} \qquad \beta_{k+1} = H(\alpha_{k+1}, \beta_k) \qquad \text{für } k \geq 1,$$

mit den Initialisierungen $\alpha_1 = f_n$ und $\beta_1 = F_n$.

Beweisen Sie, daß die Intervalle $I_k := [\alpha_k, \beta_k]$ eine Intervallschachtelung darstellen.

c) Es bezeichne $\pi$ die allen Intervallen $I_k, k \in \mathbb{N}$ angehörende Zahl, deren geometrische Bedeutung anschaulich dem Flächeninhalt des Einheitskreises entspricht. Geben Sie eine Einschachtelung von $\pi$ an, wobei sie die Rekursion zunächst mit dem gleichseitigen Dreieck und ein weiteres Mal mit dem Quadrat starten. Wieviele Iterationen benötigt man, um $\pi$ mit Sicherheit auf zwei Nachkommastellen genau ($\pi \approx 3.14$) berechnet zu haben?

---

[1] Die Bezeichnung $\pi$ stammt vom Initialbuchstaben des griechischen Wortes $\tau\grave{o}\;\; \underline{\pi}\varepsilon\rho\iota\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\nu$ = *das(der) Perimeter bzw. der Umfang*, welches Archimedes in seinen Abhandlungen für den Kreisumfang verwendet. Sie wurde 1647 von William Oughtred eingeführt und später von anderen Gelehrten wie Barrow und vor allem Euler übernommen.