Universität Konstanz
FB Mathematik und Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

WS 2008/09
Ausgabe: 9. 1. 2009
Abgabe: 15. 1. 2009, 10 Uhr

Analysis I

9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1:

Bekanntlich ist $\big(C\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big)$ ein Banachraum mit $C^1\big([-1,1];\mathbb{R}\big) \subset C\big([-1,1];\mathbb{R}\big)$. Damit ist $\big(C^1\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big)$ ebenfalls ein normierter Raum.

a) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ eine Cauchyfolge in $\big(C^1\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big)$ ist. Folgere daraus, dass $\big(C^1\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big)$ kein Banachraum ist.

b) Zeige, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ in $\big(C^1\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big)$ eine Nullfolge ist, dass aber dort $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Folgere daraus, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\big(C^1\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(C\big([-1,1];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_\infty\big), \quad f \mapsto f',$$

nicht stetig sein kann.

Aufgabe 9.2:

Wir definieren die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; \quad p \in \mathbb{Z}, \;\; q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass f in x_0 stetig ist.

Aufgabe 9.3:

Die Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar (d.h. f ist in (a,b) differenzierbar, in a rechtsseitig differenzierbar und in b linksseitig differenzierbar). Weiter gelte für alle $x \in [a,b]$

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass f in $[a,b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Tipp: Man verwende die Kompaktheit des Intervalls $[a,b]$.