Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 2

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Für das Ganze Blatt sei $\mathbb{P}_n$ der K-Vektorraum aller Polynome f mit $\deg f \leq n$.

Aufgabe 2.1
Sei K ein Körper.

(a) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $g \in K[x]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathsf{D}(x^n g) = n x^{n-1} g + x^n \mathsf{D}(g).$$

Seien $g, f \in K[x]$. Zeigen Sie weiter, dass

$$\mathsf{D}(fg) = \mathsf{D}(f)g + f\mathsf{D}(g).$$

(b) Seien $i \in \mathbb{N}_0$ und $a \in K$. Zeigen Sie, dass $D((x-a)^i) = i(x-a)^{i-1}$.

(c) Sei jetzt $\mathrm{char}(K) = 0$. Seien $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Für $0 \leq i \leq n$ seien $L_i : K[x] \to K$ das Linear Funktional definiert durch $L_i(f) := D^{(i)}(f)(a)$ und $P_i := \frac{(x-a)^i}{i!} \in \mathbb{P}_n$. Zeigen Sie, dass

$$L_i(P_j) = \delta_{ij}.$$

Aufgabe 2.2
Sei K ein Körper.

(a) Für $0 \leq i \leq n$ sei $Q_i \in K[x]$ ungleich null mit $\deg Q_i = i$. Zeigen Sie, dass $\{Q_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$ ist.

(b) Sei char$(K) = 0$. Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $x^3 - x^2 + 3$ in 1.

(c) Seien char$(K) = 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, aus Teil (a), dass

$$\mathcal{B}' := (1, (x-1), (x-1)^2, ..., (x-1)^n)$$

eine (angeordnete) Basis von $\mathbb{P}_n$ ist. Sei $\mathcal{B} := (1, x, x^2, ..., x^m)$. Geben Sie $a_{ij} \in K$ an, so dass für die Matrix A mit Einträgen a_{ij} für alle $\alpha \in \mathbb{P}_n$ gilt $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 2.3

(a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}[x]$ sind Ideale?

(i) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) = 0\}$

(ii) $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f = 0$ or $\deg f \leq 4\}$

(iii) $\{f \in Q[x] \mid D(f)(2) = 0\}$

Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Seien K ein Körper und I_i für $i \in \mathbb{N}$ Ideale von $K[x]$. Zeigen Sie, dass $\cap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ ein Ideal von $K[x]$ ist.

(c) Seien K ein Körper und $a_1, a_2, ..., a_n \in K[x]$. Zeigen Sie, dass das von $\{a_1, ..., a_n\}$ erzeugte Ideal gleich dem Durchschnitt alle Ideale die $\{a_1, ..., a_n\}$ enthalten ist.

Aufgabe 2.4

(a) Seien K ein Körper und $t_0, ..., t_n \in K$ paarweise verschieden. Für $0 \leq i \leq n$ sei

$$P_i = \prod_{j \neq i} \frac{(x - t_j)}{(t_i - t_j)}.$$

Sei

$$\mathcal{V}(t_0, ..., t_n) := \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B} := (1, x, ..., x^n)$ und $\mathcal{B}' := (P_0, ..., P_n)$. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \mathbb{P}_n$, $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \mathcal{V}(t_0, ..., t_n)[\alpha]_{\mathcal{B}}$ gilt.

Diese Matrix heißt die **Vandermonde-Matrix**.

(b) Sei $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{Q}$. Sei $t_0 = 1, t_1 = -1, t_2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Sei $p \in \mathbb{P}_2$, so dass $[p]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Finden Sie $[p]_{\mathcal{B}}$.

Hinweis: Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{V}(t_0, t_1, t_2)^{-1}$.

Aufgabe 2.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Sei K ein Körper. Eine Teilmenge I einer K-Algebra $\mathcal{A}$ heißt ein Ideal von $\mathcal{A}$, wenn I ein Unterraum von $\mathcal{A}$ ist und für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ und $\beta \in I$, $\alpha\beta \in I$ gilt. Ein Element a eines kommutativen Ringes R heißt eine Einheit von R, wenn es ein $b \in R$ gibt mit $ab = 1$.
Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in K[[x]] \backslash \{0\}$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ und eine Einheit $u \in K[[x]]$ existieren, so dass $\alpha = x^i u$. Folgern Sie, dass $K[[x]]$ ein Hauptidealring ist.
Hinweis: Finden Sie zunächst die Einheiten von $K[[x]]$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 7.05.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---

http://www.math.uni-konstanz.de/~ gregory/linearealgebra2.html