Tim Seger
16. November 2010

Diagonalisierung und Jordansche Normalform

1.1 Eigenräume & Diagonalisierung

Wir betrachten $V = \mathbb{C}^n$ und eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit der Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. I bezeichne im Folgenden die $n \times n$ Einheitsmatrix.

Definition und Lemma. 1.1

(a) *Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt* ***Eigenwert*** *von A, falls ein $0 \neq v \in V$ existiert mit $Av = \lambda v$. Jedes solche v heißt* ***Eigenvektor*** *zum Eigenwert λ. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig und damit besitzt A höchstens n verschiedene Eigenwerte.*

(b) *$Eig(A, \lambda) := \{v \in V : Av = \lambda v\}$ heißt Eigenraum zum Eigenwert λ und $P_A(t) := \det(t \cdot I - A)$ heißt* ***charakteristisches Polynom*** *von A.*

(c) *Es gilt: λ Eigenwert von $A \quad \Leftrightarrow \quad P_A(\lambda) = 0$.*

(d) *Die Vielfachheit einer Nullstelle λ von $P_A(t)$ heißt* ***algebraische Vielfachheit*** *des Eigenwerts λ und wird mit $\mu_a(A, \lambda)$ bezeichnet.*

(e) *Die Dimension des Eigenraums $Eig(A, \lambda)$ heißt* ***geometrische Vielfachheit*** *des Eigenwerts λ und wird mit $\mu_g(A, \lambda)$ bezeichnet und kann aus der Relation*

$$\mu_g(A, \lambda) = \dim(Kern(A - \lambda I)) = n - rang(A - \lambda I)$$

berechnet werden.

(f) *Es gilt: $\mu_a(A, \lambda) \geq \mu_g(A, \lambda)$ und $\mu_a(A, \lambda) = 1 \Rightarrow \mu_g(A, \lambda) = 1$.*

(g) *Die Matrix A heißt* ***diagonalisierbar****, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. In diesem Fall ist*

$$\mathbb{C}^n = Eig(A, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus Eig(A, \lambda_k).$$

A ist genau dann diagonalisierbar, falls gilt: $P_A(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h. $P_A(t) = \prod_{i=1}^{k}(t - \lambda_i)^{r_i}$ mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und ihren algebraischen Vielfachheiten $r_i := \mu_a(A, \lambda_i)$, und für jeden Eigenwert λ_i ist $\mu_g(A, \lambda_i) = \mu_a(A, \lambda_i) = r_i$. Die erste Forderung ist über $\mathbb{C}$ stets erfüllt.

Zur **Berechnung** einer Basis bezüglich der A Diagonalgestalt hat, geht man wie folgt vor:

1. Bestimme die Eigenwerte von A sowie deren algebraische Vielfachheit durch Berechnung von $P_A(t)$ und seiner Nullstellen.

2. Versuche nun zu jedem Eigenwert λ genau $\mu_a(A, \lambda)$ viele linear unabhängige Eigenvektoren zu finden. Da diese eine Basis von $Kern(A - \lambda I)$ sein sollen, berechnet man sie als Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda I)v = 0$.

   Für $\mu_a(A, \lambda) = 1$ findet man auch stets genau einen Eigenvektor. Findet man allerdings für einen Eigenwert λ weniger als $\mu_a(A, \lambda)$ viele linear unabhängige Lösungen von $(A - \lambda I)v = 0$, so ist A nicht diagonalisierbar.

3. Hat man n linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ gefunden, so schreibt man diese in die Spalten einer $n \times n$ Matrix $S := (v_1, \ldots, v_n)$ und invertiert diese. Damit ist dann $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ wobei die Reihenfolge der Eigenwerte in der Diagonalmatrix davon abhängt, in welcher Spalte von S der zu λ_i gehörende Eigenvektor steht.

Für nicht diagonalisierbare Matrizen möchte man eine ähnliche Darstellung haben, um Berechnungen zu vereinfachen. Daher benutzt man für diese

1.2 Haupträume & Jordansche Normalform

Definition. 1.2

(a) *Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Dann heißt $Hau(A, \lambda) := Kern((A - \lambda I)^n)$ der* ***Hauptraum*** *von A zum Eigenwert λ.*

(b) *$w \in \mathbb{C}^n$ heißt* ***Hauptvektor*** *der Stufe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls gilt: $(A - \lambda I)^k w = 0$ und $(A - \lambda I)^{k-1} w \neq 0$. Eigenvektoren sind also Hauptvektoren der Stufe 1.*

(c) *Zu $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt die $m \times m$-Matrix*

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordan-Elementarmatrix /-kästchen/-block *der Größe m zum Parameter λ.*

Satz. 1.3
Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) *$dim(Hau(A, \lambda)) = \mu_a(A, \lambda)$.*

(b) *$Hau(A, \lambda) = Kern((A - \lambda I)^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \mu_a(A, \lambda)$.*

(c) *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, so hat man die Zerlegung*

$$\mathbb{C}^n = Hau(A, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus Hau(A, \lambda_k).$$

Definition. 1.4
Ein geordnetes Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ von Hauptvektoren $v_j \in \mathbb{C}^n$ der Stufe $1 \leq j \leq k$ heißt ***Hauptvektorkette*** *zum Eigenwert λ von A, falls für $j = 1, \ldots, k$ gilt: $(A - \lambda I)v_j = v_{j-1}$. Hierbei ist $v_0 := 0$, d.h. v_1 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.*

Satz. 1.5 (Jordansche Normalform)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (bzw. über $\mathbb{R}$: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit in Linearfaktoren zerfallendem charakteristischem Polynom). Dann existiert eine Basis aus Hauptvektorketten von A, bzgl. der A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_n}(\lambda_n) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

hat. Hierbei sind $r, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt, d.h. obige Darstellung ist eindeutig bis auf Permutation der Jordanblöcke.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sind wieder die Eigenwerte von A. Die Eigenwerte können in obiger Darstellung auch mehrfach auftreten, d.h. es kann mehrere, verschieden große Jordanblöcke zu einem Eigenwert geben.

Lemma. 1.6 (Berechnung der Anzahl der Jordanblöcke und ihrer Größe)
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Definiere für $i \in \mathbb{N}_0$

$$r_i := rang((A - \lambda I)^i) = n - dim(Kern((A - \lambda I)^i)). \tag{1.2}$$

Dann ist die Anzahl s_m der Jordanblöcke $J_m(\lambda)$ der Größe m zum Eigenwert λ gegeben durch:

$$s_m = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1} \; (m \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

Zur **Berechnung der Jordanschen Normalform** einer Matrix A geht man wie folgt vor:

1. Bestimme die Eigenwerte von A.
2. Für Eigenwerte λ mit $\mu_a(A,\lambda) = 1$: Bestimme einen Eigenvektor als Lösung von $(A - \lambda I)v = 0$.
3. Für Eigenwerte λ mit $\mu_a(A,\lambda) \geq 2$:
   (a) Bestimme zu λ die Anzahl der Jordanblöcke der Größe m für $m \in \mathbb{N}$ gemäß (1.3).
   (b) Zu jedem Jordanblock der Größe m: Bestimme eine Hauptvektorkette der Länge m:
      (1) Bestimme $\text{Kern}((A - \lambda I)^m)$ und $\text{Kern}((A - \lambda I)^{m-1})$.
      (2) Wähle ein $v \in \text{Kern}((A - \lambda I)^m) \setminus \text{Kern}((A - \lambda I)^{m-1})$, dann ist
      $$\big((A - \lambda I)^{m-1}v, \ldots, (A - \lambda I)^2 v, (A - \lambda I)v, v\big)$$
      (in dieser Reihenfolge!) eine Hauptvektorkette der Länge m zum Eigenwert λ, insbesondere ist $(A - \lambda I)^{m-1}v$ ein Eigenvektor von A.[1]
4. Hat man die Schritte 2. bzw. 3. + 4. für jeden Eigenwert λ von A durchgeführt und somit n linear unabhängige Eigen-/Hauptvektoren gefunden, so schreibt man diese blockweise (d.h. die Vektoren einer Hauptvektorkette stehen nebeneinander) in die Spalten einer $n \times n$ Matrix $S := [v_1, \ldots, v_n]$ und invertiert diese. Damit hat dann $S^{-1}AS$ die Form (1.1), wobei die Reihenfolge der Jordanblöcke davon abhängt, in welchen (benachbarten!) Spalte(n) von S die zu λ_i gehörende(n) Hauptvektorkette(n) stehen.

1.3 Beispiel zur Bestimmung der Jordan-Normalform

Betrachte die 6×6-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Schritt 1:
Durch mehrmaliges Entwickeln nach der 5. Zeile (der 6×6-Matrix), nach der 4. Zeile (der verbleibenden 5×5-Matrix) sowie der 2. Spalte (der verbleibenden 4×4-Matrix) bestimmt man das charakteristische Polynom von A als

$$P_A(t) = \det(A - tI_6) = (1-t)^3 \cdot (2-t)^3,$$

also ist $\lambda_1 = 1$ mit $\mu_a(A,\lambda_1) = 3$ und $\lambda_2 = 2$ mit $\mu_a(A,\lambda_2) = 3$. Damit entfällt Schritt 2.

[1] Bei mehreren Jordanblöcken zum gleichen Eigenwert ist hierbei auf die lineare Unabhängigkeit der Hauptvektoren zu achten! Man muss daher bei der Berechnung mit der längsten Hauptvektorkette beginnen.

Warnung: Man könnte versuchen, die Hauptvektorkette ausgehend von einem Eigenvektor w_1 zu λ durch Lösen von Gleichungssystemen der Form $(A - \lambda I)w_{j+1} = w_j$ zu bestimmen. Allerdings können je nach Wahl des Eigenvektors (nämlich abhängig davon zu welcher Hauptvektorkette der gewählte Eigenvektor gehört) dabei unlösbare Gleichungssysteme auftreten! Einzig für den Fall $\mu_a(A,\lambda) = 2$ und $\mu_g(A,\lambda) = 1$ kann man einfach das Gleichungssystem $(A - \lambda I)w_2 = w_1$ den Eigenvektor w_1 zum Eigenwert λ um den fehlenden Hauptvektor w_2 der Stufe 2 zu bestimmen.

Schritte $3+4$ für $\lambda_1 = 1$:
Wir bestimmen zunächst $(A - 1 \cdot I_6)$ und vereinfachen diese Matrix, um den Rang ablesen zu können:

$$(A - 1I_6) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus sieht man $\mathrm{Rang}(A - 1 \cdot I_6) = 5$, also ist $\mu_g(A, \lambda_1) = 1$ und wir brauchen 2 Hauptvektoren (einen der Stufe 2 und einen der Stufe 3) für die Jordan-Normalform. Außerdem wissen wir an diese Stelle bereits, dass der Jordanblock zu λ_1 die Größe $m_1 = 3$ und damit die Form

$$J_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben muss. Wir bestimmen und vereinfachen nun $(A - I_6)^2$ und $(A - I_6)^3$:

$$(A - 1I_6)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 1I_6)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus den vereinfachten Darstellungen können wir nun die Ränge $\mathrm{Rang}((A-1I_6)^2) = 4$ bzw. $\mathrm{Rang}((A-1I_6)^3) = 3$ ab und können Basen der Kerne in recht einfacher Form angeben (e_i bezeichne den i-ten Einheitsvektor der Länge 6):

$$\mathrm{Kern}((A - 1I_6)) = \langle e_2 \rangle\,, \quad \mathrm{Kern}((A - 1I_6)^2) = \langle e_2,\ e_6 \rangle \quad \mathrm{Kern}((A - 1I_6)^3) = \langle e_1,\ e_2,\ e_6 \rangle\,.$$

Wir sehen, dass als Hauptvektor $v_3^{(1)}$ der Stufe 3 $v_3^{(1)} := e_1$ in Frage kommt und bestimmen nun durch Multiplikation mit $(A - 1I_6)$ die Hauptvektorkette:

$$\left(v_1^{(1)},\ v_2^{(1)},\ v_3^{(1)}\right) = \left((A - 1I_6)^2 v_3^{(1)},\ (A - 1I_6)v_3^{(1)},\ v_3^{(1)}\right) = (-e_2,\ -e_1 + 2e_2 - e_6,\ e_1)\,.$$

Damit sind wir fertig, was den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ angeht.

Schritte $3+4$ für $\lambda_2 = 2$:
Auch hier bestimmen wir zunächst $(A - 2I_6)$ und vereinfachen diese Matrix, um den Rang ablesen zu können:

$$(A - 2I_6) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $\text{Rang}(A - 2I_6) = 4$, damit ist $\mu_g(A, \lambda_2) = 2$ und wir können 2 Eigenvektoren finden und brauchen einen Hauptvektor der Stufe 2. Es gibt 2 Jordanblöcke: $J_1(2)$ der Größe $m_1 = 1$ (zu einem einzelnen Eigenvektor) und $J_2(2)$ der Größe $m_2 = 2$ (zum anderen Eigenvektor und dem zugehörigen Hauptvektor der Stufe 2). Wir bestimmen und vereinfachen nun $(A - 2I_6)^2$ um den gesuchten Hauptvektor zu finden:

$$(A - 2I_6)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Basen für die Kerne sind:

$$\text{Kern}((A - 2I_6)) = \langle e_5,\ e_2 - e_3 \rangle\,, \quad \text{Kern}((A - 2I_6)^2) = \langle e_5,\ e_2 - e_3,\ e_4 \rangle\,,$$

und als Hauptvektor $v_2^{(2)}$ der Stufe 2 kommt folglich $v_2^{(2)} := e_4$ in Frage. Durch Multiplikation mit $(A - 2I_6)$ erhalten wir die Hauptvektorkette:

$$\left(v_1^{(2)},\ v_2^{(2)}\right) = \left((A - 2I_6)v_2^{(2)},\ v_2^{(2)}\right) = (e_3 - e_2,\ e_4)\,.$$

Als weiteren Eigenvektor haben wir also noch $\widetilde{v_1}^{(2)} = e_5$ übrig.

Schritt 5

Als Transformationsmatrix S setzen wir nun

$$S := (v_1^{(1)},\ v_2^{(1)},\ v_3^{(1)},\ \widetilde{v_1}^{(2)},\ v_1^{(2)},\ v_2^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse Matrix bestimmt man (im Wesentlichen sind dabei nur Zeilen zu tauschen) als

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die Jordan-Normalform von A:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}.$$

1.4 Anwendung auf lineare Differentialgleichungen

Insbesondere erlaubt die Jordansche Normalform einer Matrix A eine Zerlegung $A = D+N$ in eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N, welche die Vertauschungsrelation $DN = ND$ erfüllen. Dies macht man sich beim Lösen von linearen Differentialgleichungen zu Nutze (vgl. Übungsaufgabe 4.1):

$$S^{-1}\exp(t\cdot A)S \overset{(4.1(iii))}{=} \exp(t\cdot S^{-1}AS) = \exp(t\cdot D + t\cdot N) \overset{(4.1(ii)),DN=ND}{=} \exp(t\cdot D)\exp(t\cdot N).$$

Für die Diagonalmatrix $D\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ist $\exp(t\cdot D) = \mathrm{diag}(\exp(t\lambda_1),\ldots,\exp(t\lambda_n))$. Die nilpotente Matrix setzt man in die Exponentialreihe ein und erhält $\exp(t\cdot N)$ als endliche Summe, da (spätestens) $N^{\lceil \frac{n}{2}\rceil} = 0$ gilt. Insgesamt erhält man eine Fundamentalmatrix $Z(t)$ der homogenen linearen Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ dann als

$$Z(t) = \exp(t\cdot A) = S\exp(t\cdot D)\exp(t\cdot N)S^{-1}$$

und alle Lösungen haben dann die Form $y(t) = Z(t)c$, wobei der Vektor c aus der Anfangbedingung zu bestimmen ist.

Die Lösungsgesamtheit kann man auch ohne die explitzite Kenntnis der Fundamentalmatrix angeben, sobald man alle Eigen- und Hauptvektoren berechnet hat: Jede Hauptvektorkette $(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m)$ der Länge m zum Eigenwert λ (aus Schritt 4) liefert m linear unabhängige Lösungen der Form

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= v_1\exp(t\cdot\lambda),\\
y_2(t) &= (tv_1\exp(t\cdot\lambda) + v_2\exp(t\cdot\lambda)),\\
y_3(t) &= \left(\frac{t^2}{2}v_1\exp(t\cdot\lambda) + tv_2\exp(t\cdot\lambda) + v_3\exp(t\cdot\lambda)\right),\\
\vdots &= \quad\vdots\ ,\\
y_m(t) &= \sum_{j=1}^{m}\frac{t^{m-j}}{(m-j)!}v_j.
\end{aligned}$$

Einzelne Eigenvektoren fasst man hier einfach als Kette der Länge $m = 1$ auf. Vergleiche hierzu auch Satz 3.13 der Vorlesung. „Faustregel“ für die Bildung der m Lösungen: Der Eigenvektor v_1 aus der Kette kommt in jeder Lösung vor und wird mit der höchsten Potenz von t multipliziert; für jede Lösung kommt ein Hauptvektor höherer Stufe hinzu und bei den bereits vorhandenen Hauptvektoren erhöht sich jeweils die t-Potenz.

Abschließend betrachten wir nochmals das obige Beispiel mit der Matrix A aus (1.4) - diesmal aber als lineare Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$. Dann finden wir die folgenden 6 linear unabhängigen Lösungen, die ein Fundamentalsystem der Gleichung bilden:

Aus der Hauptvektorkette $(-e_2,\ -e_1 + 2e_2 - e_6,\ e_1)$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= -e_2\exp(t)\\
y_2(t) &= (-te_2\exp(t) + (-e_1 + 2e_2 - e_6)\exp(t)),\\
y_3(t) &= \left(-\frac{t^2}{2}e_2\exp(t) + t(-e_1 + 2e_2 - e_6)\exp(t) + e_1\exp(t)\right).
\end{aligned}$$

Aus der Hauptvektorkette $(e_3 - e_2, e_4)$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned}
y_4(t) &= (e_3 - e_2)\exp(2t)\\
y_5(t) &= (t(e_3 - e_2)\exp(2t) + e_4\exp(2t)).
\end{aligned}$$

Aus dem einzelnen Eigenvektor e_5 zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$y_6 = e_5\exp(2t).$$

Jede Lösung der Differentialgleichung hat folglich die Form $y(t) = \sum_{j=1}^{6} c_j y_j(t)$, wobei die Konstanten aus der Anfangsbedingung zu bestimmen sind.