

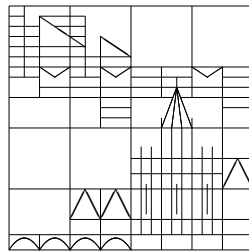
Skript zur Vorlesung

Theorie

partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2012/13

Robert Denk



Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 15. 2. 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und funktionalanalytische Grundlagen	1
	a) Partielle Differentialgleichungen als Cauchyprobleme	1
	b) Grundlagen der Operatortheorie	4
	c) Das Bochner-Integral	8
2	Operatorhalbgruppen: Erste Eigenschaften	12
3	Generatoren von Halbgruppen	21
	a) Der Satz von Hille-Yosida	21
	b) Dissipative Operatoren und der Satz von Lumer-Phillips	30
4	Holomorphe Halbgruppen und holomorpher Funktionalkalkül	34
	a) Vektorwertige Funktionentheorie und Dunfordkalkül	34
	b) Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren	39
	c) Generatoren holomorpher Halbgruppen	45
	d) Das inhomogene Cauchy-Problem	51
5	Anwendungen auf lineare Gleichungen im Hilbertraum	55
	a) Adjungierte Operatoren und der Satz von Stone	55
	b) Die Wärmeleitungsgleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{C})$	56
	c) Die Schrödingergleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{C})$	58
	d) Die Wellengleichung: L^2 -Theorie	59
	e) Die Stokesgleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$	60
6	Störungstheorie und Anwendungen	63
	a) Abstrakte Störungstheorie	63
	b) Anwendungen	66
7	L^p -Theorie: Parabolische Operatoren im Ganzraum	69
	a) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Michlin	69
	b) Parameterelliptische Differentialoperatoren	71
8	Energiemethoden für nichtautonome Evolutionsgleichungen	80
	a) Parabolische Gleichungen	80

b) Hyperbolische Gleichungen	90
c) Nichtlineare Gleichungen	99
A Elemente der Sobolevraumtheorie	104
B Anmerkungen zur schwachen Konvergenz	106
C Sätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen	108
Literatur	109
Index	111

1. Motivation und funktionalanalytische Grundlagen

1.1 Worum geht's? Evolutionsgleichungen und der operatortheoretische Zugang zu ihrer Lösung stehen im Mittelpunkt dieser Vorlesung. Daher werden in diesem einleitenden Abschnitt einige wichtige partielle Differentialgleichungen als abstrakte Evolutionsgleichungen geschrieben, d.h. als Cauchy-Probleme. Dabei handelt es sich um parabolische wie auch hyperbolische Gleichungen. Weiter werden hier einige wichtige Begriffe und Grundlagen aus der Operatortheorie zitiert, welche in den folgenden Abschnitten verwendet werden. Schreibt man eine partielle Differentialgleichung als abstraktes Cauchyproblem, tauchen in natürlicher Weise Integrale und Ableitungen Banachraum-wertiger Funktionen auf. Der zugehörige (Lebesguesche) Integralbegriff ist der des Bochner-Integrals, welches ebenfalls kurz vorgestellt wird.

a) Partielle Differentialgleichungen als Cauchyprobleme

Was verstehen wir unter Evolutionsgleichungen? Prinzipiell sind dies Gleichungen, die zeitabhängige Prozesse beschreiben. Wir starten mit einigen einführenden Beispielen aus verschiedenen Bereichen.

1.2 Beispiele. Im folgenden werden einige parabolische Gleichungen vorgestellt bzw. wiederholt, welche zum Teil bereits im ersten Teil der Vorlesung ausführlich behandelt wurden.

a) Die **Wärmeleitungsgleichung** aus der allgemeineren Klasse der Diffusionsgleichungen lautet

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Die Zielfunktion $u(t, x)$ beschreibt eine Temperaturverteilung. Auch die Black-Scholes-Gleichung, welche etwa den Wert einer Option beschreibt, lässt sich auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen.

b) Die **Populationsgleichung** (Lotka-Volterra Räuber-Beute-Modell) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{B} &= a_1 B - a_2 R, \\ \dot{R} &= -a_3 R + a_4 B \\ (B, R)|_{t=0} &= (B_0, R_0). \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind die Koeffizienten Funktionen von B und R , also $a_j = a_j(B, R)$. Dadurch wird das System nichtlinear.

c) Die **Navier-Stokes-Gleichung** aus der Strömungsmechanik lautet

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u \Big|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Wenn wir durch Vernachlässigung des $(u \cdot \nabla)u$ - Terms linearisieren, dann spricht man von der Stokesgleichung. Der Vektor $u(t, x)$ steht für das Geschwindigkeitsfeld, $p(t, x)$ für die Druckverteilung eines Fluids.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist Gegenstand eines der Millennium-Probleme, deren Lösung mit jeweils einer Million Dollar dotiert sind. Folgendes ist bekannt:

- Falls $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, so existiert eine global schwache Lösung v der Navier-Stokes-Gleichung.
- Falls $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, so existiert eine (zeitlich) lokale klassische Lösung w zur Navier-Stokes-Gleichung.

Es bleiben zwei Fragen, die unmittelbar zusammenhängen, seit über 70 Jahren unbeantwortet:

- Ist v eindeutig?
- Existiert w global?

1.3 Beispiel. Die **Wellengleichung** ist der typische Vertreter hyperbolischer Gleichungen. Sie lautet

$$\begin{aligned} v_{tt} - \Delta v &= 0, \\ v \Big|_{t=0} &= v_0, \\ v_t \Big|_{t=0} &= v_1. \end{aligned}$$

Hier beschreibt $v(t, x)$ etwa die Auslenkung der Welle.

1.4 Beispiel. Die **Schrödingergleichung** spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t - i\Delta u &= 0, \\ u \Big|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Dabei gibt $|u|^2(t, x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte an, ein Teilchen zur Zeit t bei x anzutreffen.

Es gibt viele weitere Beispiele von Evolutionsgleichungen, darunter

- Maxwell - Gleichungen,
- Einstein'sche Feldgleichungen,
- freie Randwertprobleme, wie z.B. das Stefanproblem, welches ein Modell für einen im Wasser schwimmenden, schmelzenden Eisblock darstellt.

1.5 Bemerkung. Bei der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen interessieren uns folgende Fragen:

- (i) Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen,
- (ii) die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten,
- (iii) das qualitative Lösungsverhalten: Existiert die Lösung global; hat man Stabilität, d.h. konvergiert $u(t)$ für $t \rightarrow \infty$ oder bleibt u zumindest beschränkt?

Der klassische Zugang zu den obigen Gleichungen besteht in der Standardtheorie partieller Differentialgleichungen, jedoch ist meist eine separate Theorie für jede Gleichung notwendig. Ein alternativer Zugang, der die gemeinsame Struktur der Gleichungen ausnutzt, ist die Identifikation der obigen Beispiele als *Cauchy-Problem*, d.h. ein abstraktes Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned} \dot{u} - Au &= 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

In den obigen Beispielen entspricht der Operator A bzw. die Zielfunktion u folgenden Größen:

- Wärmeleitungsgleichung: $A = \Delta$;
- Populationsgleichung: $u = (B, R)$ und $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 \end{pmatrix}$;
- Navier - Stokes - Gleichung: $A = \mathbb{P}\Delta$ mit Projektionsoperator \mathbb{P} , der Gradientenfelder auf 0 abbildet, sprich $\mathbb{P}\nabla p = 0$;
- Wellengleichung: $u = (v, \dot{v})$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$;
- Schrödingergleichung: $A = i\Delta$;

Hier sei an die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen erinnert: Sind $u_0 \in \mathbb{C}^n$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann ist die Lösung des oben gestellten Cauchy - Problems gegeben durch $u(t) = \exp(tA)u_0$. Wir können $T : [0, \infty) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ mit $T(t) = \exp(tA)$ als Lösungsoperator auffassen.

Die Idee, die hier diskutiert werden soll, ist eine Erweiterung dieses Lösungsansatzes auf 'allgemeinere lineare Operatoren', wie z.B. $A = \Delta$ in der Wärmeleitungsgleichung. Die formale Lösung wäre dann gegeben durch $u(t) = \exp(t\Delta)u_0$. Hierbei ist u_0 Element eines normierten Funktionenraums X wie z.B. $X = L^2, C, H^1, C^\alpha, BUC$. Dann ist $T(t) = \exp(t\Delta)$ eine Familie von beschränkten Operatoren auf X , d.h. eine Abbildung

$$T : [0, \infty) \longrightarrow L(X) := \{B : X \rightarrow X \mid B \text{ linear und stetig}\}.$$

Beachte jedoch, dass Δ i.a. ein unbeschränkter Operator auf X ist!

Unser Ziel wird sein, $\exp(t\Delta)$ oder allgemeiner $\exp(tA)$ einen Sinn für eine möglichst große Klasse von unbeschränkten Operatoren A zu geben. Der Vorteil dieses Zugangs liegt in einer allgemeineren Theorie, die sich auf eine große Klasse von partiellen DGL anwenden lässt, und in der Tatsache, dass man es beim Cauchy - Problem mit einer gewöhnliche Differentialgleichung zu tun hat. Das hat jedoch den Preis, dass diese gewöhnliche Differentialgleichung in einem Banachraum lebt, d.h., dass die Funktionen X -wertig zu betrachten sind und dass vorhandene Randbedingungen in den Definitionsbereich $D(A)$ von A verarbeitet werden müssen.

b) Grundlagen der Operatortheorie

Bezeichnung (Wichtige Funktionenräume). a) Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ -Algebra der Borelmengen in \mathbb{R}^n . Für eine Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $1 < p < \infty$ setzen wir $L^p(A) := L^p(\lambda|_A; \mathbb{C})$ mit dem n -dimensionalen Lebesgue-Maß λ . Wir schreiben häufig $\int f(y)dy$ statt $\int f d\lambda$. In der Literatur ist auch die Schreibweise $L_p(A)$ üblich. Für $p = \infty$ definiert man

$$L^\infty(A) := \left\{ u : A \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ messbar, ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} B(U) &:= \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und beschränkt}\}, \\ C(U) &:= \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}, \\ BC(U) &:= C_b(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}, \\ BUC(U) &:= \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ gleichmäßig stetig und beschränkt}\}, \\ C_0(U) &:= \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\}, \\ C^k(U) &:= \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}), \end{aligned}$$

$$C_0^k(U) := C^k(U) \cap C_0(U),$$

c) Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man $C^k(\overline{U})$ als die Menge aller Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, welche eine Fortsetzung $g: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ auf eine offene Menge $\tilde{U} \supset \overline{U}$ besitzen mit $g \in C^k(\tilde{U})$.

d) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $\mathcal{D}(U) := C_0^\infty(U)$ auch der Raum der Testfunktionen auf U . Auf $\mathcal{D}(U)$ kann eine lokalkonvexe Topologie definiert werden, welche $\mathcal{D}(U)$ zu einem vollständigen (aber nicht metrisierbaren) topologischen Vektorraum macht. In dieser Topologie konvergiert eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(U)$ von Testfunktionen genau dann gegen 0, falls ein Kompaktum $K \subset U$ existiert mit $\text{supp } \varphi_n \subset K$ ($n \in \mathbb{N}$) und für die Halbnormen

$$p_{K,N}(\varphi) := \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathcal{D}(U))$$

gilt: $p_{K,N}(\varphi_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

e) Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die Menge aller Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:

$$p_N(f) := \sup\{(1 + |x|)^N |D^\alpha f(x)| : |\alpha| \leq N, x \in \mathbb{R}^n\} < \infty \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Durch die Familie $\mathcal{P} := \{p_N : N \in \mathbb{N}\}$ von Normen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt, durch welche $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu einem Fréchetraum (d.h. einem vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum) wird. Der Schwartz-Raum heißt auch der Raum der schnell fallenden Funktionen.

1.6 Definition (Räume von Distributionen). Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ besteht der Raum $\mathcal{D}'(U)$ aller Distributionen auf U aus allen stetigen linearen Abbildungen $u: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$. Der Raum aller temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in \mathbb{R}^n besteht aus allen linearen stetigen Abbildungen $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. In beiden Fällen ist die Topologie auf $\mathcal{D}'(U)$ bzw. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch die oben angegebene lokalkonvexe Topologie definiert.

Seien X, Y Banachräume. Im folgenden verwenden wir die Standardbezeichnung $L(X, Y)$ für die Menge der stetigen linearen Operatoren von X nach Y . Versehen mit der Operatornorm, wird $L(X, Y)$ selbst wieder zu einem Banachraum. Wir setzen $L(X) := L(X, X)$ und $X' := L(X, \mathbb{C})$ (topologischer Dualraum von X , Raum der stetigen linearen Funktionale auf X).

1.7 Definition (Konvergenz und Stetigkeit von Operatoren). Seien X, Y Banachräume, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$.

a) Die Folge T_k konvergiert gegen T gleichmäßig oder in der Operatornorm, falls $\|T_k - T\|_{L(X,Y)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der starken Operatornorm oder stark, falls für alle $x \in X$ gilt: $\|T_k x - Tx\|_Y \rightarrow 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{s} T$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der schwachen Operatornorm oder schwach, falls für alle $x \in X$ und für alle $f \in Y'$ gilt: $f(T_k x - Tx) \rightarrow 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{w} T$.

b) Eine operatorwertige Abbildung $T: [0, \infty) \rightarrow L(X, Y)$ heißt gleichmäßig stetig, falls $T \in C([0, \infty), L(X, Y))$, wobei $L(X, Y)$ mit der Operatornorm versehen wird. Die Abbildung heißt stark stetig, falls für alle $x \in X$ gilt: $t \mapsto T(t)x \in C([0, \infty), Y)$. Sie heißt schwach stetig, falls für alle $x \in X$ und alle $f \in Y'$ gilt: $t \mapsto f(T(t)x) \in C([0, \infty))$.

1.8 Bemerkung. a) Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt starke Konvergenz und aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Analoge Aussagen gelten für die Stetigkeit.

b) Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dicht, und seien $A, B \in L(X, Y)$ mit $Ax = Bx$ für alle $x \in D$. Dann gilt $A = B$ als Gleichheit in $L(X, Y)$.

c) Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dichter Untervektorraum und $B: D \rightarrow Y$ eine lineare und beschränkte Abbildung (d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|Bx\|_Y \leq C\|x\|_X$ ($x \in D$)). Dann existiert genau eine Fortsetzung $\tilde{B} \in L(X, Y)$ von B . Es gilt $\|\tilde{B}\|_{L(X, Y)} \leq C$.

1.9 Lemma. Seien X, Y Banachräume und $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ beschränkt (bzgl. Operatornorm). Es gebe eine dichte Teilmenge $D \subset X$ so, dass für alle $x \in D$ die Folge $(T_k x)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge ist. Dann existiert genau ein $T \in L(X, Y)$ mit $T_k \xrightarrow{s} T$. Es gilt $\|T\|_{L(X, Y)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\|_{L(X, Y)}$.

Beweis. Übung. □

Für die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen ist die Klasse der stetigen Operatoren auf einem Banachraum X zu klein. Eine für viele Zwecke hinreichend große Klasse ist die der abgeschlossenen Operatoren.

1.10 Definition. Seien X, Y Banachräume. Ein linearer Operator A von X nach Y ist eine lineare Abbildung $A: D(A) \rightarrow Y$, dessen Definitionsbereich $D(A) \subset X$ ein Untervektorraum von X ist. Man schreibt $A: X \supset D(A) \rightarrow Y$ oder auch nur $A: X \rightarrow Y$. Ein linearer Operator heißt dicht definiert, falls sein Definitionsbereich eine dichte Teilmenge von X ist.

Ein linearer Operator $A: X \supset D(A) \rightarrow Y$ heißt abgeschlossen, falls der Graph $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ ist. Dies ist

gleichbedeutend zu: Gilt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \rightarrow x$ in X und $Ax_k \rightarrow y$ in Y , dann folgt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

1.11 Beispiele. a) Der Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ in $C([0, 1])$ besitzt den (dichten) Definitionsbereich $D\left(\frac{d}{dx}\right) = C^1([0, 1])$, d.h.

$$\frac{d}{dx} : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]).$$

Wie man am Beispiel der C^1 -Funktionen $f(x) = x^n$ mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ in $C^1([0, 1])$ bzw. $C([0, 1])$ sieht, ist $\frac{d}{dx}$ unbeschränkt. Anhand der Definition prüft man leicht nach, dass $\frac{d}{dx}$ abgeschlossen ist.

b) Der Laplaceoperator Δ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$ ist abgeschlossen und dicht definiert, d.h. $D(\Delta) \xrightarrow{d} L^p(\mathbb{R}^n)$.

1.12 Satz (Wichtige Sätze aus der Operatortheorie).

a) **(Satz vom abgeschlossenen Graphen)** Seien X, Y Banachräume, $T : X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist T stetig.

b) **(Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit)** Sei $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$. Es existiere für jedes $x \in X$ ein $C_x > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq C_x$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt bereits $\|T\|_{L(X, Y)} \leq C$ für alle $T \in \mathcal{T}$ mit einer universellen Konstante $C > 0$.

c) **(Satz von der stetigen Inversen)** Seien X, Y Banachräume, $T : X \rightarrow Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist $T^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig.

d) **(Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach)** Sei X ein Banachraum und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $f \in X'$ mit $\|f\|_{X'} = 1$ und $f(x) = \|x\|_X$.

1.13 Definition. Sei X Banachraum und $A : X \rightarrow X$ linearer Operator, dann heißt

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ bijektiv und } (\lambda - A)^{-1} \in L(X)\}$$

die Resolventenmenge von A und

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

das Spektrum von A . Für $\lambda \in \rho(A)$ heißt $R_\lambda(A) := (\lambda - A)^{-1}$ die Resolvente von A .

1.14 Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, folgt die Bedingung $R_\lambda(A) \in L(X)$ bereits aus der Bijektivität von $\lambda - A$. Es gilt die Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

c) Das Bochner-Integral

Im folgenden sei X ein komplexer Banachraum, versehen mit der Borel- σ -Algebra, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

1.15 Definition. Eine Stufenfunktion (Treppenfunktion) ist eine Funktion $s: \Omega \rightarrow X$ der Form $s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, und $a_i \in X$ ($i = 1, \dots, n$). Falls $\mu(A_i) < \infty$ ($i = 1, \dots, n$) gilt, heißt s integrierbare Stufenfunktion. In diesem Fall ist das Bochner-Integral definiert durch

$$\int_{\Omega} s d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in X.$$

Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Man kann folgende Äquivalenzen zeigen:

1.16 Satz. Für eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow X$ sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n: \Omega \rightarrow X$ mit $f_n(z) \rightarrow f(z)$ (in X) für alle $z \in \Omega$.
- (ii) f ist messbar und $f(\Omega)$ ist separabel.

1.17 Satz. Sei $f: \Omega \rightarrow X$ messbar und $f(\Omega)$ separabel. Dann sind äquivalent:

- (i) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von integrierbaren Stufenfunktionen $f_n: \Omega \rightarrow X$ mit $f_n(z) \rightarrow f(z)$ ($z \in \Omega$) und

$$\int \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

- (ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Bei stetigen Funktionen ist die Bedingung der Separabilität automatisch erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

1.18 Lemma. Sei Ω ein separabler topologischer Raum und sei $f: \Omega \rightarrow X$ stetig. Dann ist $f(\Omega)$ separabel.

Beweis. Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ abzählbar und dicht. Dann ist $X_0 := f(\Omega_0)$ abzählbar, und es gilt

$$A := f^{-1}(\overline{X_0}) \supset f^{-1}(X_0) \supset \Omega_0.$$

Da f stetig ist, ist A abgeschlossen, und es folgt $\Omega = \overline{\Omega_0} \subset \overline{A} = A$, also

$$f(\Omega) = f(A) = f(f^{-1}(\overline{X_0})) \subset \overline{X_0}$$

und damit $f(\Omega) = \overline{X_0}$. Also ist $f(\Omega)$ separabel. □

1.19 Definition. a) Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow X$ heißt stark messbar (oder μ -messbar), falls eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert so, dass $f|_{\Omega \setminus N}$ messbar ist und $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.

b) Eine stark messbare Funktion $f: \Omega \rightarrow X$ heißt (μ) -integrierbar, falls $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall wähle eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von integrierbaren Treppenfunktionen mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall und $\int \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und definiert das Bochner-Integral von f über Ω bzgl. μ durch

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Wie üblich sei

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Man setzt $\mathcal{L}^1(\mu, X) := \{f: \Omega \rightarrow X \mid f \text{ ist integrierbar}\}$ und $\mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{K})$.

Die vektorwertigen L^p -Räume $L^p(\mu; X)$ werden wie üblich definiert als Quotientenraum $L^p(\mu; X) := \mathcal{L}^p(\mu; X)/N$. Hierbei ist $\mathcal{L}^p(\mu; X)$ die Menge aller stark messbaren f , für welche $\|f\|_{L^p(\mu; X)} := (\int \|f\|^p d\mu)^{1/p}$ endlich ist, und N die Menge aller $f \in \mathcal{L}^1(\mu; X)$ mit $\|f\|_{L^1(\mu; X)} = 0$. Für $p = \infty$ hat man die üblichen Modifikationen.

Falls $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und μ das Lebesgue-Maß ist, so schreibt man üblicherweise $L^1(\Omega; X) := L^1(\mu; X)$.

Für Bochner-Integrale gelten die aus der skalaren Lebesgue-Theorie bekannten Konvergenzsätze.

1.20 Satz. a) (**Satz von der majorisierten Konvergenz**). Seien $f_n: \Omega \rightarrow X$ stark messbar mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall. Sei $g: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar mit $\int g d\mu < \infty$ und $\|f_n(z)\| \leq g(z)$ μ -fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(z)\| \leq g(z)$ μ -fast überall.

Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$, $f \in L^1(\mu; X)$ und

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \text{ in } X \quad (n \rightarrow \infty).$$

b) Sei $f_n: \Omega \rightarrow X$ stark messbar mit $\sum_{n=1}^{\infty} \int \|f_n\| d\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert in X für μ -fast alle $z \in \Omega$.

Die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), & \text{falls } \sum_n f_n(z) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in L^1(\mu; X)$ und $A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (d.h. disjunkte Vereinigung) mit $A_n \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

d) Für $f \in L^1(\mu; X)$ gilt $\| \int f d\mu \|_X \leq \int \|f\|_X d\mu$.

Im Zusammenhang mit Halbgruppen werden wir insbesondere über reelle Intervalle integrieren. Man beachte, dass stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen integrierbar sind.

1.21 Lemma. Sei der lineare Operator $A : X \supset D(A) \rightarrow X$ abgeschlossen und $f \in C([0, \infty), X)$ mit $f(t) \in D(A)$ für $t \geq 0$ und $Af \in C([0, \infty), X)$. Dann gilt $\int_0^t f(s) ds \in D(A)$ und

$$A \int_0^t f(s) ds = \int_0^t Af(s) ds \quad (t \geq 0).$$

Beweis. Sei $t > 0$ fest. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $t_k := \frac{tk}{n}$ ($k = 0, \dots, n$) und definieren die Stufenfunktionen f_n, g_n durch $f_n := \sum_{k=1}^n f(t_k) \chi_{(t_{k-1}, t_k]}$ und $g_n := \sum_{k=1}^n A[f(t_k)] \chi_{(t_{k-1}, t_k]}$. Als stetige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[0, t]$ sind f und Af gleichmäßig stetig, und daher gilt $f_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow Af$ gleichmäßig auf dem Intervall $(0, t]$. Somit folgt

$$\int_0^t f_n(s) ds \rightarrow \int_0^t f(s) ds \quad \text{und} \quad \int_0^t g_n(s) ds \rightarrow \int_0^t Af(s) ds \quad (n \rightarrow \infty)$$

(Konvergenz in der Norm von X). Aufgrund der Linearität von A , der Definition des Integrals über Stufenfunktionen und der Voraussetzung $f(s) \in D(A)$ ($s \geq 0$) gilt $\int f_n(s) ds \in D(A)$ und

$$A \left(\int_0^t f_n(s) ds \right) = \int_0^t Af_n(s) ds = \int_0^t g_n(s) ds.$$

Da A abgeschlossen ist, erhalten wir $\int_0^t f(s) ds \in D(A)$ und

$$A \left(\int_0^t f(s) ds \right) = \int_0^t Af(s) ds.$$

□

1.22 Bemerkung. Die Aussage des obigen Lemmas gilt allgemeiner: Falls $f \in L^1(\mu; X)$ mit $f(s) \in D(A)$ und $Af \in L^1(\mu; X)$ für einen abgeschlossenen Operator A , so folgt bereits $\int f d\mu \in D(A)$ und $A(\int f d\mu) = \int Af d\mu$.

1.23 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f \in C([0, \infty), X)$ heißt differenzierbar in $t_0 \in [0, \infty)$ genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} =: f'(t_0)$$

in X existiert. Man schreibt $f \in C^k([0, \infty), X)$, falls f k -mal stetig differenzierbar ist.

1.24 Bemerkung. a) Sei X Banachraum und $f \in C([0, \infty), X)$. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f(0).$$

Für $F(t) := \int_0^t f(s) ds$ ($t \geq 0$) gilt $F \in C^1([0, \infty), X)$ und $F' = f$.

b) Falls X Banachraum ist und $f \in C^1([0, \infty), X)$, so gilt

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds \quad (t \in [0, \infty)).$$

2. Operatorhalbgruppen: Erste Eigenschaften

2.1 Worum geht's? Der Begriff der Operatorhalbgruppe fasst die wesentlichen Eigenschaften zusammen, welche etwa die im endlich-dimensionalen Fall bekannte Fundamentalmatrix $\exp(tA)$ zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt. Dabei werden die Halbgruppen, welche im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen auftreten, nicht normstetig sein, sondern nur stark stetig.

Im Folgenden sei X ein \mathbb{C} -Banachraum. Es stellt sich heraus, dass das Cauchyproblem

$$u' = Au, u(0) = x$$

genau dann wohlgestellt ist, wenn der Operator A eine C_0 -Halbgruppe erzeugt. Damit wird die Lösbarkeit von Gleichungen zurückgeführt auf Eigenschaften des in der Gleichung auftretenden Operators. In Anwendungen, in welchen etwa A ein Differentialoperator (im Ort) ist, sind diese Eigenschaften oft leichter nachzurechnen als die Lösbarkeit selbst.

2.2 Beispiel. Bevor wir die allgemeine Definition für Operatorhalbgruppen einführen, wollen wir zur Motivation den endlich-dimensionalen Fall betrachten: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, und $T(t) := \exp(tA)$. Es gilt

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ ($t, s \geq 0$) (Halbgruppeneigenschaft),
- (iii) $T \in C([0, \infty), L(\mathbb{C}^n))$.

Ferner sieht man schnell, dass $A = T'(0)$ gilt. Diese Formulierung der Eigenschaften von $\exp(tA)$ macht auch in einem allgemeineren Rahmen Sinn. Aus Gründen der Konsistenz zum endlichdimensionalen Fall stellt sich deshalb die Frage, ob aus (i), (ii) und (iii) bereits $T(t) = \exp(tA)$ gefolgert werden kann.

2.3 Satz. Sei $T : [0, \infty) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$, so dass (i), (ii) und (iii) erfüllt sind. Dann gilt $T(t) = \exp(tA)$ mit $A = T'(0)$. Insbesondere gilt $T \in C^\infty((0, \infty), L(\mathbb{C}^n))$.

Beweis. Setze

$$V(t) := \int_0^t T(s) ds,$$

dann ist V wegen (iii) differenzierbar und $V'(t) = T(t)$ für $t \geq 0$. Damit gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(t)}{t} = V'(0) = T(0) \stackrel{(i)}{=} I.$$

Mit dieser Ableitung muß $V(t)$ für kleine $t > 0$ bereits invertierbar sein, wie man aus der Entwicklung $V(t) = V(0) + tV'(0) + o(t) = tI + o(t)$ sieht. Also gibt es ein $t_0 > 0$ so, dass $V(t_0)$ invertierbar ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned} T(t) &= V^{-1}(t_0)V(t_0)T(t) \stackrel{(ii)}{=} V^{-1}(t_0) \int_0^{t_0} T(t+s)ds \\ &= V^{-1}(t_0) \int_t^{t+t_0} T(s)ds = V^{-1}(t_0)(V(t+t_0) - V(t)), \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = V^{-1}(t_0) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(t+t_0) - V(t) - V(t_0)}{t} = V^{-1}(t_0)(V'(t_0) - V'(0)).$$

Aus der Differenzierbarkeit von $T(t)$ an der Stelle $t = 0$ folgt jene für alle $t \geq 0$, denn $T(t+s) - T(s) = T(s)(T(t) - I)$, also

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = T(t)T'(0).$$

Damit löst $T(t)x$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u' - Au &= 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

mit $A = T'(0)$, deren eindeutige Lösung wir in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen als

$$T(t)x = \exp(tA)x$$

kennengelernt haben. □

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) genügen somit, um eine Halbgruppe mit Generator A zu definieren. Dies motiviert

2.4 Definition. Eine Familie $(T(t))_{t \geq 0}$ von linearen, beschränkten Operatoren auf einem Banachraum X wird C_0 -Halbgruppe oder *stark stetige Halbgruppe* genannt, falls

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$,
- (iii) T ist stark stetig, d.h. für alle $x \in X$ ist $[0, \infty) \rightarrow X$, $t \mapsto T(t)x$ stetig.

Für eine C_0 -Halbgruppe setzen wir

$$D := \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existiert} \right\}.$$

Im allgemeinen ist $D \neq X$. Wir werden später sehen, dass D immer eine dichte Teilmenge von X ist.

2.5 Definition. Der lineare, eindeutig bestimmte Operator $A: D \rightarrow X$ definiert durch

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

heißt *Generator* oder *Erzeuger* von T , und $D(A) := D$ heißt Definitionsbereich von A .

2.6 Beispiel. $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist C_0 -Halbgruppe auf \mathbb{C}^n .

2.7 Lemma (Translationshalbgruppe). Definiere $(T(t)f)(x) := f(x+t)$, $t \geq 0$. Dann ist $(T(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, mit Generator

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \frac{d}{dx}f \in L^p(\mathbb{R}) \right\} = W_p^1(\mathbb{R}).$$

Beweis. Zunächst ist $T(t)$ beschränkt wegen

$$\|T(t)f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \implies \|T(t)\|_{L(L^p(\mathbb{R}))} \leq 1.$$

Bekannt ist, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} L^p(\mathbb{R})$. Für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\|T(t)f - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < |K|^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{x \in K} |f(x+t) - f(x)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

für kompakte Intervalle $K := \{x+y : x \in \text{supp}(f), y \in [-1, +1]\}$. Aus Bemerkung 1.8 b) und Lemma 1.9 folgt die starke Stetigkeit, d.h. Eigenschaft (iii). Eigenschaften (i) und (ii) sind trivial. Damit ist T eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$. Sei B der Generator von T . Aus der Gleichheit

$$\frac{T(t)f - f}{t} = \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t}$$

für $f \in L^p(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$D(B) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existiert} \right\} = W_p^1(\mathbb{R}) = D(A),$$

$$Bf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} = \frac{d}{dx}f = Af.$$

Also gilt $A = B$, d.h. A erzeugt T . □

2.8 Beispiele. a) Betrachte den *Gaußkern*

$$G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

Dann definiert $T(t) := G_t * f$ eine C_0 -Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator $A = \Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Dies sieht man unter Verwendung der Fouriertransformation und des Satzes von Plancherel.

b) Sei $A \in L(X)$ und X ein Banachraum. Dann ist

$$T(t) = \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

eine C_0 -Halbgruppe auf X mit Generator A . Außerdem ist T gleichmäßig stetig wegen

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^k}{k!} = \exp(t\|A\|) - 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

2.9 Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung zu Beispiel 2.8 b): Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe mit Generator $A : D(A) \rightarrow X$, so dass

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \rightarrow 0.$$

Dann gilt $A \in L(X)$. Dies sieht man, indem man den Beweis zu Satz 2.3 kopiert.

2.10 Lemma. Sei T eine C_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X mit Generator $A : D(A) \rightarrow X$.

a) Es gilt $T(t)x \in D(A)$ für alle $x \in D(A)$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

b) Es gilt $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ für alle $x \in X$, und

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x ds \quad (x \in X) \tag{2-1}$$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax ds \quad (x \in D(A)) \tag{2-2}$$

Beweis. a) Sei $x \in D(A)$ und $h \geq 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} T(t)Ax \quad (t \geq 0).$$

Damit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = AT(t)x$$

und stimmt mit dem obigen überein. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M_t$, $s \in [0, t]$, für beliebiges $t > 0$. Damit folgt für $t > 0$ und $h \leq t$

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = -T(t-h) \frac{x - T(h)x}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} T(t)Ax,$$

d.h. auch die linksseitige Ableitung existiert und stimmt mit der rechtsseitigen überein. Somit ist Aussage a) gezeigt.

b) Sei $x \in X$ und $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(T(h) \int_0^t T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} T(t)x - x \end{aligned}$$

nach Bemerkung 1.24 a). Also gilt $\int_0^t T(s)ds \in D(A)$ und die Gleichheit (2-1). Mit der Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M$, $s \in [0, t]$, folgt für $x \in D(A)$

$$T(s) \frac{T(h)x - x}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} T(s)Ax \quad \text{gleichmäßig für } s \in [0, t],$$

was schließlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - 1}{h} \int_0^t T(s)x ds = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t T(s) \frac{T(h)x - x}{h} ds = \int_0^t T(s)Ax ds$$

impliziert. □

2.11 Lemma. Sei T eine C_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X . Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t) \quad (t \geq 0). \quad (2-3)$$

Hierzu zunächst

2.12 Definition. Sei T eine C_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X .

a) Die Zahl

$$\omega(T) := \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \text{Es existiert ein } M_\omega \geq 1 \text{ so, dass (2-3) gilt} \right\}$$

heißt die *Wachstumsschranke* von T .

b) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ gilt, so heißt T beschränkt.

c) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, so heißt T eine *Kontraktionshalbgruppe*.

d) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega < 0$ gilt, so heißt T *exponentiell stabil*.

Beweis von Lemma 2.11. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für $t \in [0, 1]$, setze $\omega = \log M$. Für $t \in [0, \infty)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $t \leq m \leq t + 1$ gilt

$$\|T(t)\|_{L(X)} = \left\| T\left(\frac{t}{m}\right)^m \right\| \leq \left\| T\left(\frac{t}{m}\right) \right\|^m \leq M^m \leq M^{t+1} = M \exp(\omega t).$$

□

2.13 Satz. Sei X ein Banachraum. Dann ist der Generator $A : D(A) \rightarrow X$ einer C_0 -Halbgruppe T auf X ein abgeschlossener, dicht definierter Operator, der die C_0 -Halbgruppe T eindeutig bestimmt.

Beweis. Abgeschlossenheit: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \rightarrow x$ und $Ax_k \rightarrow y$ in X . Nach Lemma 2.10 b) gilt

$$T(t)x_k - x_k = \int_0^t T(s)Ax_k ds.$$

Die gleichmäßige Konvergenz von $T(s)Ax_k$ in $[0, t]$ impliziert

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

Damit erhält man

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds \longrightarrow y \in X \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Daher existiert der Grenzwert links, d.h. $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Dichtheit von $D(A)$: Nach Bemerkung 1.24 a) gilt für $x \in X$,

$$D(A) \ni \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \xrightarrow{t \rightarrow 0} x.$$

Eindeutigkeit von T : Sei S eine weitere von A erzeugte Halbgruppe auf X , $x \in D(A)$, und $t > 0$. Setze

$$u(s) := T(s)S(t-s)x, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Dann folgt

$$\frac{du(s)}{ds} = AT(s)S(t-s)x + T(s)(-A)S(t-s)x = 0.$$

Nach Bemerkung 1.24 b) ist u konstant auf $[0, t]$, also

$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x \quad (t > 0, x \in D(A)),$$

d.h. es gilt $T = S$. □

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir zurückkommen zum Cauchyproblem im Banachraum X , was ja die ursprüngliche Motivation für die Einführung von Halbgruppen war. Die Frage ist nun, ob die bereitgestellte Theorie die Ausgangsfragen zur Lösung solcher Probleme in zufriedenstellender Weise beantwortet. Hierzu zunächst folgende

2.14 Definition. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ abgeschlossen mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem

$$(CP) \quad \begin{cases} \partial_t u - Au &= 0, & t > 0, \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

heißt (*klassisch*) *wohlgestellt* in X , falls

- (i) eine eindeutige klassische Lösung existiert, d.h. für alle $x \in D(A)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^1([0, \infty), X)$ von (CP) mit $u(t) \in D(A)$ ($t \geq 0$).
- (ii) u stetig von den Daten abhängt, d.h. für alle $t > 0$ existiert eine Konstante $C_t > 0$ mit $\|u(t)\| \leq C_t \|x\|$ ($x \in D(A)$).

2.15 Satz. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ abgeschlossen mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem (CP) ist genau dann wohlgestellt, wenn A Generator einer C_0 -Halbgruppe T auf X ist.

Beweis. (i) Sei A Generator der C_0 -Halbgruppe T , und sei $x \in D(A)$. Wir setzen $u(t) := T(t)x$. Nach Lemma 2.10 a) ist $u \in C^1([0, \infty), X)$ Lösung von (CP), $u(t) \in D(A)$; ($t \geq 0$) und $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x \in X$. Außerdem stellt Lemma 2.11 für $t > 0$ sicher, dass

$$\|u(t)\| = \|T(t)x\| \leq M \exp(\omega t) \|x\|,$$

d.h. u hängt stetig von den Daten ab.

Zur Eindeutigkeit: Sei v eine weitere klassische Lösung von (CP), $x \in D(A)$, und $t \geq 0$. Wir setzen

$$w(s) := T(s)v(t-s) \quad (0 \leq s \leq t).$$

Wie im Beweis von Satz 2.13 folgt $\frac{dw(s)}{ds} = 0$ und daher $w = \text{const}$. Dies impliziert

$$T(t)x = w(t) = w(0) = v(t) \quad (t > 0, x \in D(A)).$$

(ii) Sei (CP) wohlgestellt und sei $x \in D(A)$. Diesmal setzen wir $T(t)x := u(t, x)$, wobei $u(\cdot, x)$ die eindeutige Lösung von (CP) zum Anfangswert x sei. Aus (ii) folgt $T(t) \in L(X)$, $t \geq 0$. Klar sind die Eigenschaften $T(0) = I$ sowie $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$, d.h. T ist stark stetig. Zum Nachweis der Halbgruppeneigenschaft seien $s, t \geq 0$. Man beachte, dass $u(t+s, x)$ und $u(t, u(s, x))$ beides Lösungen von (CP) zum Anfangswert $u(s, x)$ sind. Aus der Eindeutigkeit folgt

$$u(t+s, x) = u(t, u(s, x)),$$

was zeigt, dass

$$T(t+s)x = u(t+s, x) = u(t, u(s, x)) = T(t)u(s, x) = T(t)T(s)x.$$

Damit ist T eine C_0 -Halbgruppe. Sei B der Generator von T . Für $x \in D(A)$ erhält man

$$Ax(t, x) = \partial_t u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} y := \partial_t u(0, x) \in X$$

nach Voraussetzung. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt somit

$$Ax = y = \partial_t u(0, x) = T'(0)x.$$

Da der rechte Limes bei Existenz mit Bx übereinstimmt folgt also $x \in D(B)$ und $Ax = Bx$ für $x \in D(A)$. Sei umgekehrt $x \in D(B)$. Wegen $\overline{D(A)} = X$ können wir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ wählen mit $x_k \rightarrow x$. Nach Lemma 2.10 b) folgt weiter

$$A \int_0^t T(s)x_k ds = B \int_0^t T(s)x_k ds = T(t)x_k - x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Tx - x$$

und wegen Abgeschlossenheit von A , dass

$$A \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = \frac{T(t)x - x}{t}, \quad t > 0.$$

Da die rechte Seite für $t \rightarrow 0$ gegen Bx konvergiert, sehen wir unter erneuter Ausnutzung der Abgeschlossenheit von A , dass $x \in D(A)$. Somit haben wir $D(A) = D(B)$ und deshalb $A = B$. \square

Mit Satz 2.15 reduziert sich das Lösen von linearen Cauchyproblemen auf den Nachweis, dass A ein Generator ist. Doch auch nichtlineare Probleme können mit Hilfe eines Generatorresultates angegangen werden. Wie das funktioniert wollen wir hier nur kurz skizzieren. Wir werden später bei der Anwendung auf konkrete Beispiele sehen, wie diese Methode im Einzelnen durchzuführen ist.

Wir betrachten das inhomogene Cauchyproblem

$$(ICP) \quad \begin{cases} \dot{u} - Au &= f, & t > 0, \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

Dann ergibt *Variation der Konstanten* die formale Lösung

$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-s)A)f(s)ds.$$

Falls (ICP) nichtlinear ist, d.h. $f = f(s, u)$ wie z.B. in der Navier - Stokes - Gleichung $f(u) = (u \cdot \nabla)u$, kann versucht werden ein Fixpunktargument (z.B. den *Banachschen Fixpunktsatz*) auf die Integralformel anzuwenden. Bei erfolgreicher Anwendung zieht diese Methode i.d.R. die Existenz einer lokalen Lösung nach sich, d.h. es existiert ein $T > 0$ und ein $u : [0, T) \rightarrow X$, die (ICP) im sogenannten milden Sinne löst. Wir möchten an dieser Stelle anmerken, dass im Allgemeinen keine Existenz einer globalen Lösung erwartet werden kann. Z.B. ist zur Gleichung

$$u_t - \Delta u = |u|^\alpha$$

bekannt, dass i.A. keine globale (milde) Lösung in $L^p(\Omega)$ für gewisse Werte von p und α existiert.

3. Generatoren von Halbgruppen

3.1 Worum geht's? Satz 2.15 motiviert die Suche nach hinreichenden oder äquivalenten Bedingungen, so dass A eine C_0 -Halbgruppe erzeugt. Die bisherige Diskussion zeigt, dass eine C_0 -Halbgruppe T mit Generator A als etwas wie $\exp(tA)$ aufgefaßt werden kann. Die Idee, um zu einem abgeschlossenen Operator A eine Halbgruppe zu gewinnen, ist, eine Approximation der Exponentialfunktion zu benutzen. Wir kennen bereits die klassischen Methoden

$$(i) \quad \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

$$(ii) \quad \exp(tA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}A\right)^n,$$

die den entscheidenden Nachteil haben, dass wir beliebig hohe Potenzen von unbeschränkten Operatoren erhalten. Hier gibt es keinen Weg Konvergenz sicherzustellen. Verheißungsvollere Ansätze sind:

$$(iii) \quad \exp(tA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-n} \quad (\text{„Idee von Hille“}),$$

$$(iv) \quad \exp(tA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(tA_k) \text{ mit } A_k \text{ beschränkt („Idee von Yosida“)}.$$

Diese Ansätze sollen im folgenden diskutiert werden.

a) Der Satz von Hille-Yosida

Im nächsten Abschnitt werden wir uns der Konstruktion von Halbgruppen widmen, die auf (iv), d.h. auf der Idee von Yosida, beruht.

Hier wollen wir das Theorem von Hille und Yosida beweisen, welches die Grundlage für alle folgenden Diskussionen sein wird.

3.2 Bemerkung. Sei X ein Banachraum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $(T(t))_{t \geq 0}$ ist C_0 -Halbgruppe auf X mit Generator A und $\omega(T) = \omega_0$.
- (ii) $(\exp(-\lambda t)T(t))_{t \geq 0}$ ist C_0 -Halbgruppe auf X mit Generator $A - \lambda I$ und $\omega(\exp(-\lambda)T) = \omega_0 - \lambda$.

3.3 Satz (Hille-Yosida '48; Kontraktionshalbgruppen-Fall). *Für einen linearen Operator $A : D(A) \rightarrow X$ auf dem Banachraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) A ist der Generator einer C_0 - Kontraktionshalbgruppe T auf X .
(ii) Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(0, \infty) \in \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq 1$ für $\lambda > 0$.

In diesem Fall gilt

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds \quad (\lambda > 0).$$

3.4 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann ist die Laplacetransformation von e^{tA} gegeben durch

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tA}dt = (\lambda - A)^{-1},$$

wobei $\lambda \in \rho(A)$ Bedingung für die Existenz ist. Die Laplacetransformation knüpft also eine Verbindung zwischen Halbgruppe und Resolvente. Wir werden im Beweis von Theorem 3.3 sehen, dass dies auch X -wertig der Fall ist.

Beweis von Satz 3.3, (i) \Rightarrow (ii). Nach Bemerkung 3.2 generiert $A - \lambda I$ die C_0 - Halbgruppe $(\exp(-\lambda t)T(t))_{t \geq 0}$ für festes $\lambda > 0$. Aus Lemma 2.10 b) folgt

$$\exp(-\lambda t)T(t)x - x = (A - \lambda) \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)x ds, \quad \text{falls } x \in X \quad (3-1)$$

und

$$\exp(-\lambda t)T(t)x - x = \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)(A - \lambda)x ds, \quad \text{falls } x \in D(A) \quad (3-2)$$

Es gilt

$$\int_0^\infty \|\exp(-\lambda s)T(s)x\| ds \leq \int_0^\infty \exp(-\lambda s)ds \|x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}. \quad (3-3)$$

Somit existiert das Integral $\int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds$. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)x ds - \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)x ds \right\| \\ = \int_0^\infty \chi_{(t, \infty)}(s) \exp(-\lambda s) \|T(s)x\| ds \\ \leq \int_0^\infty \chi_{(t, \infty)}(s) \exp(-\lambda s) ds \|x\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Lebesgue angewendet wurde. Die Abgeschlossenheit von A und $t \rightarrow \infty$ liefern dann in (3-1) bzw. (3-2),

$$x = (\lambda - A) \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)x ds =: (\lambda - A)R(\lambda)x \quad (x \in X),$$

$$x = R(\lambda)(\lambda - A)x, \quad (x \in D(A)).$$

Folglich ist $(\lambda - A) : D(A) \rightarrow X$ beschränkt und bijektiv. Nach dem Satz der stetigen Inversen gilt $\lambda \in \rho(A)$ und

$$(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds,$$

und schließlich impliziert (3-3)

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq 1 \quad (\lambda > 0).$$

□

Um der Idee von Yosida zu folgen benötigen wir eine Folge von beschränkten Operatoren die in einem gewissen Sinne gegen A konvergiert. Hierzu hilft das

3.5 Lemma (Yosida-Approximation). Sei $A : D(A) \rightarrow X$ mit $\overline{D(A)} = X$ gegeben, und seien $\omega \in \mathbb{R}, M > 0$ so, dass $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq M, \lambda \geq \omega$. Dann gilt

- (i) $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} x \quad (x \in X),$
- (ii) $\lambda A(\lambda - A)^{-1}x = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} Ax \quad (x \in D(A)).$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beweis von Satz 3.3 (ii) \Rightarrow (i). Lemma 3.5 (ii) motiviert die Approximation von $\exp(tA)$ durch

$$(\exp(tA_k))_{k \in \mathbb{N}}, \quad A_k = kA(k - A)^{-1} = k^2(k - A)^{-1} - kI.$$

Dann gilt $A_k \in L(X), k \in \mathbb{N}$ und $A_k x \rightarrow Ax$ in X für $x \in D(A)$. Nach Beispiel 2.8 b) ist

$$T_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_k)^n}{n!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X . Weiterhin gilt $A_k A_m = A_m A_k$, womit $T_k T_m = T_m T_k$ folgt.

1. Schritt: Definition der Halbgruppe. Obiges T_k ist kontraktiv für alle $k \in \mathbb{N}$, denn

$$T_k(t) = \exp(tA_k) = \exp(-kt) \exp(tk^2(k - A)^{-1}),$$

also

$$\|\exp(tA_k)\|_{L(X)} \leq \exp(-tk) \exp(tk\|k(k - A)^{-1}\|) \leq 1.$$

Für $x \in D(A)$ gilt nun $T_k(\cdot)x \in C^1([0, \infty), X)$. Mit Bemerkung 1.24 b) folgt

$$\begin{aligned} T_k(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T_m(t-s)T_k(s)x)ds \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_k(s)(A_k - A_m)x ds, \end{aligned}$$

d.h.

$$\|T_k(t)x - T_m(t)x\| \leq t\|(A_k - A_m)x\|, \quad t \geq 0, \quad (3-4)$$

was bedeutet, dass $T_k(t)x$ eine Cauchyfolge ist. Deshalb können wir T definieren als

$$T(t)x := \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(t)x, \quad x \in D(A), t \geq 0. \quad (3-5)$$

2. Schritt: T ist C_0 -Kontraktionshalbgruppe. Wegen $\|T_k\|_{L(X)} \leq 1$ und (3-3) sind die Voraussetzungen von Bemerkung 1.8 erfüllt, d.h. (3-5) gilt nicht nur für $x \in D(A)$, sondern für alle $x \in X$ und man hat $\|T(t)\|_{L(X)} \leq 1$. Klar ist $T(0) = I$. Als nächstes ist

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(t+s)x \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(t)T_k(s)x = T(t)T(s)x, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\begin{aligned} \|T_k(t)T_k(s)x - T(t)T(s)x\| &= \|T_k(t)T_k(s)x - T_k(t)T(s)x + T_k(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\leq \|T_k(t)T_k(s)x - T_k(t)T(s)x\| \\ &\quad + \|T_k(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Was die starke Stetigkeit angeht, nehme $x \in D(A)$. Dann gilt unter erneuter Benutzung von Lemma 2.10

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{k \rightarrow \infty} (T_k(t)x - x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t T_k(s)A_k x ds = \int_0^t T(s)A x ds. \end{aligned} \quad (3-6)$$

Also folgt $T(t)x \rightarrow x$ für alle $x \in D(A)$, was sich nach Bemerkung 1.8 wegen $\|T(t)\| \leq 1$ überträgt auf $T(t)x \rightarrow x$ für alle $x \in X$.

3. Schritt: A generiert T . Sei B der Generator von T . Dividiert man (3-6) durch t , dann erhält man durch den Grenzübergang $t \rightarrow 0$, dass

$$D(A) \subset D(B) \quad \text{und} \quad Ax = Bx \quad (x \in D(A)).$$

Nach Voraussetzung ist $1 \in \rho(A)$, die Richtung (i) \Rightarrow (ii) des Beweises besagt aber, dass auch $1 \in \rho(B)$ gilt. Damit folgt $A = B$ (siehe Übungsaufgabe). \square

Wir wollen als nächstes demonstrieren, wie sich dieses Resultat auf zwei konkrete Beispiele anwenden lässt. Da wir die Fouriertransformation anwenden wollen, zuvor noch eine Bemerkung.

3.6 Beispiele. (a) Schrödinger - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte das zur Schrödingergleichung gehörige Resolventenproblem

$$(\lambda - i\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3-7)$$

Da die Fourier-Transformation ein Isomorphismus im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen ist, ist die obige Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$(\lambda + i|\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3-8)$$

Als Lösungsansatz für u wähle

$$u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2} \right] \hat{f}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Man benutzt die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\lambda + i|\xi|^2} \right| &< \frac{1}{|\operatorname{Re}\{\lambda + i|\xi|^2\}|} = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \\ \left| \frac{i|\xi|^2}{\lambda + i|\xi|^2} \right| &< \frac{|\xi|^2}{|\operatorname{Im}\{\lambda + i|\xi|^2\}|} \leq 1, \quad \lambda > 0, \end{aligned}$$

und die Plancherelsche Formel, um

$$\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2 \leq \frac{\|\hat{f}\|_2}{\lambda} = \frac{\|f\|_2}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (3-9)$$

$$\|i\Delta u\|_2 = \|-i\| \cdot \|\hat{u}\|_2 \leq \|f\|_2, \quad \lambda > 0, \quad (3-10)$$

zu erhalten. Klar ist, dass \hat{u} eindeutige Lösung von (3-8) in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, d.h. wegen der Unitarität von \mathcal{F} ist also u eindeutige Lösung von (3-7) in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Als $L^2(\mathbb{R}^n)$ - Realisierung des Schrödingeroperators definiere $A_s u := i\Delta u$ mit

$$\begin{aligned} D(A_s) &= \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}|\xi|^2\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= H^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

$S(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} L^2(\mathbb{R}^n)$ und $S(\mathbb{R}^n) \subset D(A_s)$ implizieren $D(A_s) \xrightarrow{d} L^2(\mathbb{R}^n)$, also ist A_s dicht definiert.

Weiterhin setzen wir $R(\lambda)f := u_f$, wobei u_f die Lösung zu (3-7) mit rechter Seite f bezeichnet. Aus (3-10) folgt für $\lambda > 0$, dass $R(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow D(A_s)$ und wir erhalten

$$(\lambda - i\Delta)R(\lambda)f = (\lambda - i\Delta)u_f = f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

sowie

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda - i\Delta)v &= u_{(\lambda - i\Delta)v} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2} \right] \mathcal{F}(\lambda - i\Delta)v = v. \\ \implies R(\lambda) &= (\lambda - A_s)^{-1}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Mit (3-9) folgt ferner $(0, \infty) \subset \rho(A_s)$, sowie

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}f\|_2 = \|\lambda R(\lambda)f\|_2 = \|\lambda u_f\|_2 \leq \|f\|_2, \quad \lambda > 0, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Nach Theorem 3.3 generiert A_s also eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese ist gegeben durch

$$\exp(tA_s) = \mathcal{F}^{-1} \exp(i|\xi|^2 t) \mathcal{F}, \quad t \geq 0.$$

b) Wärmeleitungs - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Das zugehörige Resolventenproblem lautet

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ \xleftrightarrow{FT} (\lambda + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Setze $u := \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2} \right] f$. Analog zu (a) folgt, dass Δ eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe $(\exp(t\Delta))_{t \geq 0}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ generiert, die gegeben ist durch

$$\exp(t\Delta) = \mathcal{F}^{-1} \exp(-t|\xi|^2) \mathcal{F}.$$

3.7 Bemerkung. Wegen $\left| \frac{1}{\lambda + i|\xi|^2} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gilt für den Schrödingeroperator $A_s = i\Delta$ die Ungleichung

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}\|_{L(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

d.h. auch $-A_s$ erzeugt eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Man spricht insgesamt von der *Schrödingergruppe*

$$(\exp(i\Delta t))_{t \in \mathbb{R}} \subset L(L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Diese ist stark stetig auf \mathbb{R} , und es gilt $\exp(i\Delta(t+s)) = \exp(i\Delta t) \exp(i\Delta s)$ ($s, t \in \mathbb{R}$).

Bemerkung (3.7) motiviert die folgende allgemeine Definition.

3.8 Definition. Sei X Banachraum. Eine Familie $(T(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset L(X)$ von stark stetigen Operatoren mit

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $t, s \in \mathbb{R}$,

heißt C_0 -Gruppe auf X .

3.9 Satz (Hille-Yosida für Kontraktionsgruppen). Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A generiert eine C_0 -Kontraktionsgruppe auf X ,
- (ii) A und $-A$ generieren C_0 -Kontraktionshalbgruppen auf X ,
- (iii) $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beweis. Klar sind (ii) \Leftrightarrow (iii) nach Theorem 3.3 sowie (i) \Rightarrow (ii) nach Definition 3.8. Es bleibt (ii) \Rightarrow (i) zu zeigen. Definiere dazu

$$T(t) := \begin{cases} T_+(t) & : t \geq 0, \\ T_-(-t) & : t < 0, \end{cases}$$

wobei T_{\pm} von $\pm A$ generiert werden. Sind $(T_+)_k$ und $(T_-)_k$ die Yosida - Approximationen aus Theorem 3.3, dann gilt $A_k(-A)_m = (-A)_m A_k$ und somit auch $(T_+)_k(T_-)_m = (T_-)_m(T_+)_k$. Setze nun

$$S(t) := T_+(t)T_-(t), \quad t \geq 0.$$

Dann gilt $S(0) = I$ und $(S(t))_{t \geq 0} \subset L(X)$. Für die Ableitung ergibt sich

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AT_+(t)T_-(t)x - AT_+(t)T_-(t)x = 0 \quad (x \in D(A)).$$

Aus Bemerkung 1.24 b) folgt $S(t)x = S(0)x = x$ ($t \geq 0, x \in D(A)$) und nach Bemerkung 1.8 b) weiter $S = I$. Damit existiert $T_+(t)^{-1}$ und ist gegeben durch $T_-(t)$.

Seien $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, $s < 0$ und o.B.d.A. $t + s \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(t+s)T(t)^{-1}T(s)^{-1} &= T_+(t+s)T_+(t)^{-1}T_-(-s)^{-1} \\ &= T_+(t+s)T_+(-s)T_+(t)^{-1} = I \end{aligned}$$

und damit

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Weiterhin ist in $t_0 > 0$ die Halbgruppe T stark stetig. Dies pflanzt sich wegen der Halbgruppeneigenschaft auf \mathbb{R} fort. Klar ist, dass A die Gruppe T erzeugt. \square

3.10 Bemerkung. Da $\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}$ singulär ist für $\lambda < 0$, generiert Δ keine C_0 -Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aus Bemerkung 3.2 sieht man, dass nicht alle Halbgruppen kontraktiv sind. Umgekehrt erhält man durch Verschieben i.a. bestenfalls eine beschränkte C_0 -Halbgruppe. Deshalb ist die folgende Verallgemeinerung wichtig.

3.11 Satz (Hille - Yosida, allgemeine Form). Sei X Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ linear, $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) A ist Generator einer C_0 -Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t)$, $t \geq 0$,
- (ii) $\overline{D(A)} = X$, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|(\lambda - \omega)^k (\lambda - A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M$, $\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $\omega = 0$ voraus. Das ist nach Bemerkung 3.2 möglich.

„(i) \implies (ii)“: Nach Voraussetzung gilt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$. Wir definieren uns eine neue Norm durch

$$\| \|x\| \| := \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\|, \quad x \in X.$$

Für diese gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \| \|x\| \| &\leq \| \|x\| \| \leq M \|x\|, \quad x \in X, \\ \| \|T(t)x\| \| &= \sup_{s \geq 0} \|T(t+s)x\| \leq \| \|x\| \|, \quad x \in X, t \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist T kontraktiv auf $(X, \| \cdot \|)$. Nach Theorem 3.3 folgt schließlich

$$\begin{aligned} \| \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\| \| &\leq \| \|x\| \|, \quad x \in X, \lambda > 0, \\ \implies \| \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \| &\leq \| \|x\| \|, \quad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}, \\ \implies \| \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \| &\leq M \|x\|, \quad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

„(ii) \implies (i)“: Voraussetzung ist $\|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Auch hier definiert man sich für $\mu > 0$,

$$\| \|x\| \|_\mu := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\mu^k(\mu - A)^{-k}x\|, \quad x \in X.$$

Es gilt das *Umnormierungslemma*:

- (1) $\| \|x\| \| \leq \| \|x\| \|_\mu \leq M \|x\|$, $x \in X$,
- (2) $\|\mu(\mu - A)^{-1}x\|_\mu \leq \| \|x\| \|_\mu$, $x \in X$,
- (3) $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leq \| \|x\| \|_\mu$, $x \in X$, $0 < \lambda \leq \mu$,

$$(4) \quad \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \leq \mu,$$

$$(5) \quad \|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \leq \mu.$$

Wir wollen an dieser Stelle lediglich (3) beweisen, der Rest ist eine einfache Übungsaufgabe.

Aus der Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

folgt für $x \in X$,

$$(\lambda - A)^{-1}x = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x + (\mu - A)^{-1}x.$$

Damit erhält man

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leq \frac{\mu - \lambda}{\mu} \|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu + \frac{1}{\mu} \|x\|_\mu$$

und somit

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)}_{=\lambda/\mu} \|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leq \frac{1}{\mu} \|x\|_\mu \implies (3).$$

Mit diesem Umnormierungslemma kann man eine weitere Norm auf X definieren:

$$\| \|x\| \| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_\mu, \quad x \in X.$$

Es ist einfach einzusehen, dass

$$\|x\| \leq \| \|x\| \| \leq M \|x\|, \quad x \in X.$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \| \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\| \| &= \sup_{\mu > 0} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \\ &= \max \left\{ \sup_{0 < \lambda \leq \mu} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\leq \|x\|_\mu \leq \| \|x\| \|}, \sup_{\mu < \lambda} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\leq \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\lambda \leq \| \|x\| \|} \right\} \\ &\leq \| \|x\| \|, \quad x \in X, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung des $0 < \lambda \leq \mu$ - Supremums wurde (3), und für $\mu < \lambda$ erst (5) dann (2) ausgenutzt. Nach Theorem 3.3 generiert A eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $(X, \| \| \cdot \| \|)$, damit auch eine C_0 - Halbgruppe auf $(X, \| \cdot \|)$ und man hat

$$\| \exp(tA)x \| \leq \| \| \exp(tA)x \| \| \leq \| \|x\| \| \leq M \|x\|, \quad x \in X, t \geq 0.$$

□

3.12 Bemerkung. Entsprechend zu Satz 3.9 gilt ein allgemeines Resultat wie Satz 3.11 auch für C_0 - Gruppen.

b) Dissipative Operatoren und der Satz von Lumer-Phillips

3.13 Definition. Sei X ein Banachraum. Für $x \in X$ ist das *Subdifferential* $J(x)$ definiert durch

$$J(x) := \left\{ \varphi \in X' : \|\varphi\|_{X'}^2 = \|x\|_X^2 = \langle x, \varphi \rangle \right\}.$$

3.14 Definition. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ linear. A heißt *dissipativ*, falls für jedes $x \in D(A)$ ein $j(x) \in J(x)$ existiert mit

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0.$$

3.15 Bemerkung. a) Nach dem Satz von Hahn-Banach ist $J(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

b) Sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, $x \in \mathcal{H}$, $j(x) \in J(x)$. Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt

$$\exists^1 y_{j(x)} \in \mathcal{H} : \|x\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle x, j(x) \rangle = (x, y_{j(x)}) = \|y_{j(x)}\|_{\mathcal{H}}^2$$

und damit $y_{j(x)} = x$, d.h. $J(x) = \{x\}$. Somit ist in diesem Fall A genau dann dissipativ, wenn

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0 \quad (x \in D(A)).$$

c) Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, setze

$$\varphi_f(x) := \begin{cases} \|f\|_p^{2-p} \overline{f(x)} |f(x)|^{p-2} & : f(x) \neq 0 \\ 0 & : f(x) = 0 \end{cases},$$

dann gilt $J(x) = \{\varphi_f\}$. Der Beweis ist Übungsaufgabe. D.h. hier ist A genau dann dissipativ, wenn

$$\operatorname{Re} \langle Af, \varphi_f \rangle \leq 0, \quad f \in D(A).$$

d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $f \in L^1(\Omega)$ oder $f \in C_0(\Omega)$ enthält $J(x)$ i.a. mehr als ein Element. Auch dieser Beweis ist dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen.

3.16 Lemma. Sei X Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ dissipativ.

(i) Es gilt $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$ ($x \in D(A)$, $\lambda > 0$).

(ii) Sei $\overline{D(A)} = X$. Dann ist A abschließbar, d.h. es existiert eine abgeschlossene Erweiterung \overline{A} mit $D(A) \subset D(\overline{A})$ und $\overline{A}x = Ax$ ($x \in D(A)$).

Beweis. (i): Sei $x \in D(A)$ mit $\|x\| = 1$ und $j(x) \in J(x)$ mit $\operatorname{Re}\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0$. Dann gilt $\langle x, j(x) \rangle = \|j(x)\|^2 = 1$ und

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)x\| &= \sup_{x' \in X', \|x'\|=1} |\langle (\lambda - A)x, x' \rangle| \geq |\langle (\lambda - A)x, j(x) \rangle| \\ &\geq \operatorname{Re}\langle (\lambda - A)x, j(x) \rangle \geq \lambda - \operatorname{Re}\langle Ax, j(x) \rangle \geq \lambda \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$.

(ii): Abschließbarkeit von A ist gleichbedeutend mit: Für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \rightarrow 0$ und $Ax_k \rightarrow y$ ist zwingend $y = 0$. Seien (x_k) , y wie oben, $\lambda > 0$ und $w \in D(A)$. Dann

$$\|\lambda(\lambda - A)x_k + (\lambda - A)w\| \stackrel{(i)}{\geq} \lambda\|\lambda x_k + w\|.$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhält man

$$\left\| -y + \left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)w \right\| \geq \|w\|,$$

und für $\lambda \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\| -y + w \| \geq \|w\|, \quad w \in D(A).$$

Wegen $\overline{D(A)} = X$ wähle $(w_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $w_k \rightarrow y$. Damit ist

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y - w_k\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k\| = \|y\|,$$

also $y = 0$. □

3.17 Satz (Lumer-Phillips 1961). Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \rightarrow X$ linear.

a) Es sei A dissipativ mit $\overline{D(A)} = X$. Weiter existiere ein $\lambda_0 > 0$ mit $\overline{R(A - \lambda_0)} = X$. Dann ist \overline{A} Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X .

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist dissipativ mit $\overline{D(A)} = X$, und es existiert ein $\lambda_0 > 0$ mit $R(A - \lambda_0) = X$.

(ii) A ist Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe

Beweis. a) Sei \overline{A} der Abschluss von A (Existenz durch Lemma 3.16 sichergestellt).

- **1. Schritt:** $\lambda_0 \in \rho(\bar{A})$

Sei $x \in D(\bar{A})$, dann \exists Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \rightarrow x$ und $Ax_k \rightarrow \bar{A}x$,

$$\implies \|(\lambda_0 - \bar{A})x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(\lambda_0 - A)x_k\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_0 \|x_k\| = \lambda_0 \|x\|$$

nach Lemma 3.16(i). Also ist $(\lambda_0 - \bar{A})$ injektiv.

Sei $x \in X$ und $y_k \in D(A)$ mit $(\lambda_0 - A)y_k \rightarrow x$. Wegen der Dissipativität von A gilt

$$\lambda_0 \|y_k - y_l\| \leq \|(\lambda_0 - A)(y_k - y_l)\| \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0,$$

damit ist y_k Cauchyfolge in X . Sei $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Aus der Abgeschlossenheit von \bar{A} folgt $y \in D(\bar{A})$ und $(\lambda_0 - \bar{A})y = x$, d.h. der Operator $(\lambda_0 - \bar{A})$ ist auch surjektiv. Nach dem Satz von der stetigen Inversen gilt somit $\lambda_0 \in \rho(\bar{A})$.

- **2. Schritt:** $(0, \infty) \subset \rho(\bar{A})$

Klar ist, dass $\emptyset \neq (0, \infty) \cap \rho(\bar{A})$ offen in $(0, \infty)$ liegt. Sei $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty) \cap \rho(\bar{A})$ mit $\lambda_k \rightarrow \lambda > 0$. Wegen

$$\sigma((\mu - \bar{A})^{-1}) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\mu - \lambda}, \lambda \in \sigma(\bar{A}) \right\}, \quad \mu \in \rho(\bar{A}),$$

folgt für den Spektralradius $r((\lambda_0 - \bar{A})^{-1}) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma((\lambda_0 - \bar{A})^{-1})\}$, dass

$$r((\lambda_0 - \bar{A})^{-1}) = \frac{1}{\text{dist}(\lambda_0, \sigma(\bar{A}))}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}(\lambda_k, \sigma(\bar{A})) &= \frac{1}{r((\lambda_k - \bar{A})^{-1})} \geq \|(\lambda_k - \bar{A})^{-1}\|_{L(X)}^{-1} \\ &\geq \lambda_k \geq C > 0 \quad (k \geq k_0). \end{aligned}$$

Dies bedeutet $\lambda \in \rho(\bar{A})$. Damit ist die Menge $(0, \infty) \cap \rho(\bar{A})$ auch abgeschlossen. Da $(0, \infty)$ zusammenhängend ist, erhalten wir $(0, \infty) \subset \rho(\bar{A})$.

- **3. Schritt: Hille-Yosida anwenden**

Wegen der Dissipativität von A gilt $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$ für alle $x \in D(A)$. Diese Ungleichung überträgt sich auf den Abschluss von A , und wir erhalten

$$\|\lambda(\lambda - \bar{A})^{-1}x\|_{L(X)} \leq \|x\|, \quad x \in X, \lambda > 0.$$

Aus dem Theorem 3.3 von Hille - Yosida folgt die Behauptung.

b), (i) \implies (ii): Nach a) erzeugt \overline{A} eine C_0 -Halbgruppe. Für $\lambda_0 > 0$ ist $(\lambda_0 - A): D(A) \rightarrow X$ surjektiv und $(\lambda_0 - \overline{A}): D(\overline{A}) \rightarrow X$ injektiv. Dann folgt aber auch schon $D(A) = D(\overline{A})$ und damit $A = \overline{A}$.

b), (ii) \implies (i): Sei $x \in D(A)$, $j(x) \in J(x)$. Mit Lemma 3.5 (i) erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\langle Ax, j(x) \rangle\} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda \cdot \langle A(\lambda - A)^{-1}x, j(x) \rangle \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda \cdot \left(\langle \lambda(\lambda - A)^{-1}x, j(x) \rangle - \underbrace{\langle x, j(x) \rangle}_{\|x\|^2} \right) \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left(\underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|}_{\leq \|x\|} \cdot \|j(x)\| - \|x\|^2 \right) \leq 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wiederum Theorem 3.3 ausgenutzt wurde. \square

4. Holomorphe Halbgruppen und holomorpher Funktionalkalkül

4.1 Worum geht's? In einer Reihe von Beispielen, insbesondere in der parabolischen Theorie, hat man nicht nur eine C_0 -Halbgruppe, sondern sogar eine holomorphe Halbgruppe. Dabei handelt es sich um die Holomorphie einer Banachraumwertigen Abbildung (nämlich in den Banachraum der beschränkten linearen Operatoren). Beschränkte holomorphe Halbgruppen sind durch Abschätzungen der Resolvente charakterisiert.

Holomorphe Halbgruppen besitzen eine Glättungseigenschaft. Für derartige Probleme lässt sich die klassische Lösbarkeit beweisen, wobei für inhomogene Probleme die Variation der Konstanten verwendet wird, welche schon aus dem endlichdimensionalen Fall bekannt ist.

Zunächst müssen in diesem Abschnitt einige Grundlagen über holomorphe Banachraumwertige Funktionen bereitgestellt werden. Insbesondere wird der Dunford-Kalkül diskutiert, welcher etwa auch für die Spektraltheorie in Banachräumen wesentlich ist.

a) Vektorwertige Funktionentheorie und Dunfordkalkül

Im folgenden sei stets X ein komplexer Banachraum.

4.2 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f: G \rightarrow X$ heißt komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 \in G$, falls der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in X$$

existiert. Die Funktion f heißt holomorph in G , falls sie an jeder Stelle $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist. Wir schreiben $\mathcal{H}(G; X)$ für die Menge aller in G holomorphen X -wertigen Funktionen und $\mathcal{H}(G) := \mathcal{H}(G; \mathbb{C})$.

4.3 Bemerkung. Sei X ein Banachraum, $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f: G \rightarrow L(X)$. Äquivalent sind

- (i) $f: G \rightarrow L(X)$ ist holomorph,
- (ii) für jedes $x \in X$ ist $f(\cdot)x: G \rightarrow X$ holomorph,
- (iii) für jedes $x \in X$ und jedes $x' \in X'$ ist $\langle f(\cdot)x, x' \rangle: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Dies sieht man unter Verwendung der Cauchy-Integralformel und des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit.

4.4 Definition. Eine C_0 -Halbgruppe T auf dem Banachraum X heißt *beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe auf X vom Winkel $\varphi \in (0, \pi/2]$* , falls $T: [0, \infty) \rightarrow L(X)$ eine holomorphe Fortsetzung auf

$$\Sigma_\varphi := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \right\}$$

besitzt, so dass für alle $\tilde{\varphi} \in (0, \varphi)$ ein $M_{\tilde{\varphi}}$ existiert mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \leq M_{\tilde{\varphi}}, \quad z \in \Sigma_{\tilde{\varphi}}.$$

4.5 Lemma. Sei T beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe auf X vom Winkel φ .

- (i) Es gilt $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ ($z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi$).
- (ii) Es gilt für alle $\tilde{\varphi} < \varphi$ die Gleichheit $\lim_{\Sigma_{\tilde{\varphi}} \ni z \rightarrow 0} T(z)x = x$ ($x \in X$).
- (iii) Für $\tilde{\varphi} < \varphi$ existiert der Limes

$$\lim_{\Sigma_{\tilde{\varphi}} \ni h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

genau dann, wenn $x \in D(A)$. In diesem Fall stimmt dieser Limes mit Ax überein.

Beweis. Übung. □

Für holomorphe Banachraumwertige Funktionen gelten die bekannten Sätze der Funktionentheorie. So gilt zum Beispiel der Cauchy-Integralsatz und die Cauchy-Integralformel.

4.6 Satz (Cauchy-Integralformel). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(G; X)$. Falls γ ein nullhomologer Zyklus in G ist, so gilt

$$f(z) \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} f(w) dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)).$$

Beweis. Für jedes $x' \in X'$ ist $x' \circ f$ eine holomorphe komplexwertige Funktion, also gilt die skalare Cauchy-Integralformel

$$x'(f(z)) \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} x'(f(w)) dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)).$$

Sei $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$. Definiere

$$y := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} f(w) dw.$$

Nach Definition des Integrals als Grenzwert in X von Integralen von Stufenfunktionen gilt für jedes $x' \in X'$ die Gleichheit

$$x'(y) = x' \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} f(w) dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} x'(f(w)) dw.$$

Also erhalten wir $x'(y) = x'(f(z))$ für jedes $x' \in X'$. Nach dem Korollar zum Satz von Hahn-Banach (Satz 1.12 d)) folgt $y = f(z)$, was zu zeigen war. \square

4.7 Definition (Riesz-Projektion). Sei $A \in L(X)$ und $\sigma \subset \sigma(A)$ eine isolierte Teilmenge von $\sigma(A)$, d.h. eine in der Relativtopologie von $\sigma(A)$ offene und abgeschlossene Teilmenge. Sei γ eine geschlossene Kurve mit Werten in $\rho(A)$, welche σ umschließt. Dann heißt

$$P_{\sigma} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

die zu σ gehörige Riesz-Projektion von A .

4.8 Lemma. *Der Operator P_{σ} ist eine Projektion, d.h. es gilt $P_{\sigma} = P_{\sigma}^2$.*

Beweis. Seien γ_1, γ_2 zwei geschlossene Kurven, welche σ umschließen und σ von $\tau := \sigma(A) \setminus \sigma$ trennen. Dabei sei der Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2 . Dann folgt

$$\begin{aligned} P_{\sigma}^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

Mit der Resolventengleichung (Bemerkung 1.14) können wir den letzten Ausdruck in der Form $Q - R$ schreiben, wobei

$$\begin{aligned} Q &:= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} \text{id}_X d\mu \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = P_{\sigma} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R &:= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (\mu - A)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\mu - \lambda} \text{id}_X d\lambda\right) d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Beachte hier, dass $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2 liegt, so dass $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma_2)$ und $\text{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma_1)$ gilt. \square

4.9 Lemma. a) Sei σ ein isolierter Teil von $\sigma(A)$. Dann sind Wertebereich $R(P_\sigma)$ und Kern $N(P_\sigma)$ beide abgeschlossen, und es gilt die Zerlegung

$$X = R(P_\sigma) \oplus N(P_\sigma).$$

Beide Räume sind invariant unter A , und es gilt

$$\sigma(A|_{R(P_\sigma)}) = \sigma, \quad \sigma(A|_{N(P_\sigma)}) = \sigma(A) \setminus \sigma.$$

b) Es gilt $P_{\sigma(A)} = \text{id}_X$.

Beweis. a) Die Abgeschlossenheit von $N(P_\sigma)$ ist klar, da P_σ stetig ist. Die Abgeschlossenheit von $R(P_\sigma)$ folgt aus $R(P_\sigma) = N(1 - P_\sigma)$. Aus $A(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}A$ für $\lambda \in \rho(A)$ folgt durch Integration $AP_\sigma = P_\sigma A$ und damit $AP_\sigma = P_\sigma AP_\sigma$. Somit ist $AR(P_\sigma) \subset R(P_\sigma)$, d.h. $R(P_\sigma)$ ist A -invariant. Dieselbe Überlegung mit $1 - P_\sigma$ zeigt, dass auch $N(P_\sigma)$ invariant unter A ist. Wegen $x = P_\sigma x + (1 - P_\sigma)x$ ($x \in X$) und $P_\sigma(1 - P_\sigma) = 0$ erhält man die direkte Zerlegung in a).

Sei γ eine geschlossene Kurve, welche σ von $\tau := \sigma(A) \setminus \sigma$ trennt. Für $\mu \notin R(\gamma)$ definiere

$$S(\mu) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Da P_σ mit A und somit mit $(\lambda - A)^{-1}$ vertauscht, gilt auch $S(\mu)P_\sigma = P_\sigma S(\mu)$, und die Räume $R(P_\sigma)$ und $N(P_\sigma)$ sind $S(\mu)$ -invariant. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S(\mu)(\mu - A) &= (\mu - A)S(\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} (\mu - A)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} \text{id}_X d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \begin{cases} -1 + P_\sigma, & \text{falls } \mu \text{ im Inneren von } \mathcal{R}(\gamma) \text{ liegt,} \\ P_\sigma, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei nun $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ und o.E. sei μ außerhalb von $\mathcal{R}(\gamma)$. Dann folgt $(\mu - A)S(\mu)x = S(\mu)(\mu - A)x = x$ für $x \in R(P_\sigma)$, d.h. $(\mu - A)|_{R(P_\sigma)}$ ist invertierbar. Damit erhalten wir $\sigma(A|_{R(P_\sigma)}) \subset \sigma$. Analog folgt $\sigma(A|_{N(P_\sigma)}) \subset \tau$. Falls andererseits $\mu \in \rho(A|_{R(P_\sigma)}) \cap \rho(A|_{N(P_\sigma)})$, so ist $\mu - A$ auf jedem der beiden Teilräume $N(P_\sigma)$ und $R(P_\sigma)$ eine Bijektion und somit auf ganz X bijektiv, d.h. $\mu \in \rho(A)$. Insgesamt erhalten wir

$$\sigma(A) \subset \sigma(A|_{N(P_\sigma)}) \cup \sigma(A|_{R(P_\sigma)}) \subset \sigma \cup \tau = \sigma(A).$$

Also muss überall Gleichheit stehen.

b) Wir wenden Teil a) auf $\sigma := \sigma(A)$ an und erhalten $\sigma(A|_{N(P_\sigma)}) = \sigma(A) \setminus \sigma = \emptyset$. Dies ist aber nur möglich, falls $N(P_\sigma) = \{0\}$, d.h. für $P_\sigma = \text{id}_X$. \square

4.10 Lemma. Sei $A \in L(X)$ und γ eine geschlossene Kurve, für welche $\sigma(A)$ im Inneren von γ liegt. Dann gilt für jedes komplexe Polynom p die Gleichheit

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} p(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Beweis. Es genügt, die Gleichheit für $p(z) = z^n$ nachzuweisen. Dazu verwende die Identität

$$A^n(\lambda - A)^{-1} = \lambda^n(\lambda - A)^{-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} A^j.$$

Sei γ eine geschlossene Kurve, welche $\sigma(A)$ einschließt. Dann ist das Integral über die obige Summe gleich Null, da der Integrand holomorph von λ abhängt. Unter Verwendung von Lemma 4.9 b) erhält man daher

$$\begin{aligned} A^n &= A^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} A^n (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^n (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

4.11 Definition (beschränkter Dunford-Kalkül). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $A \in L(X)$ mit $\sigma(A) \subset \Omega$. Sei γ eine geschlossene Kurve in \mathbb{C} mit Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma) \subset \rho(A)$, welche $\sigma(A)$ einschließt. Zu $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definiere

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

4.12 Satz. In der Situation von Definition 4.11 ist $f \mapsto f(A)$, $\mathcal{H}(\Omega) \rightarrow L(X)$ ein Algebren-Homomorphismus, d.h. eine lineare Abbildung mit

$$(fg)(A) = f(A)g(A) \quad (f, g \in \mathcal{H}(\Omega)).$$

Beweis. Wegen $\sup_{\lambda \in \mathcal{R}(\gamma)} |f(\lambda)| < \infty$ ist $f(A) \in L(X)$ wohldefiniert. Die Linearität von $f \mapsto f(A)$ ist klar.

Seien $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und seien γ_1, γ_2 zwei Kurven in Ω , welche $\sigma(A)$ einschließen, so dass $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2 liegt. Dann gilt unter Verwendung der Resolventengleichung

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int_{\gamma_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda\right) \left(\int_{\gamma_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} [(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}] d\mu d\lambda \\ &=: T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} T_1 &:= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu\right) f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} g(\lambda)f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= (f \cdot g)(A), \end{aligned}$$

da $\text{ind}_{\gamma_2}(\lambda) = 1$ für $\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_1)$ gilt. Mit $\text{ind}_{\gamma_1}(\mu) = 0$ für $\mu \in \mathcal{R}(\gamma_2)$ folgt analog

$$T_2 := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda = 0.$$

□

b) Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Nun ist es das Ziel, auch für unbeschränkte Operatoren einen Funktionalkalkül zu entwickeln. Dabei werden sektorielle Operatoren betrachtet.

4.13 Definition. Sei $A: D(A) \rightarrow X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi : \rho(A) \supset \Sigma_\varphi, \sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A .

4.14 Lemma. Sei A ein sektorieller Operator in X mit spektralem Winkel φ_A . Zu $\varepsilon > 0$ definiere

$$A_\varepsilon := (A - \varepsilon)(1 - \varepsilon A)^{-1}.$$

a) Es gilt $A_\varepsilon \in L(X)$, und A_ε ist invertierbar mit $A_\varepsilon^{-1} = A_{1/\varepsilon}$.

b) Es gilt $\rho(A_\varepsilon) \supset \Sigma_{\varphi_A}$, und für $\lambda \in \Sigma_{\varphi_A}$ ist

$$(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\lambda)^2} \left(\frac{\lambda + \varepsilon}{1 + \varepsilon\lambda} - A \right)^{-1} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\lambda}.$$

c) Für alle $\varphi \in (0, \varphi_A)$ existiert eine Konstante $C = C(\varphi)$, welche nicht von ε abhängt, mit

$$\|\lambda(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| \leq C \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \varepsilon > 0).$$

d) Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man $(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \rightarrow (\lambda - A)^{-1}$ in $L(X)$ und $A_\varepsilon x \rightarrow Ax$ ($x \in D(A)$).

Beweis. a) und b): Man verwendet die Identität

$$\alpha(A + \beta)(A + \gamma)^{-1} = \alpha + \alpha(\beta - \gamma)(A + \gamma)^{-1}$$

und erhält

$$A_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(A - \varepsilon)\left(A - \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)\left(A - \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$$

und damit

$$\lambda - A_\varepsilon = \frac{\varepsilon\lambda + 1}{\varepsilon}\left(A - \frac{\varepsilon + \lambda}{\varepsilon\lambda + 1}\right)\left(A - \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$$

sowie

$$(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon\lambda + 1}\left(A - \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(A - \frac{\varepsilon + \lambda}{\varepsilon\lambda + 1}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\varepsilon\lambda + 1} + \frac{\varepsilon^2 - 1}{(\varepsilon\lambda + 1)^2} \left(A - \frac{\varepsilon + \lambda}{\varepsilon\lambda + 1} \right)^{-1}.$$

c) Sei $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq M$ ($\lambda \in \Sigma_\varphi$). Dann folgt unter Verwendung der Darstellung in b) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| &\leq M \left| \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\lambda)^2} \cdot \frac{1 + \varepsilon\lambda}{\lambda + \varepsilon} \right| + \left| \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\lambda} \right| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \left[\frac{M(1 - \varepsilon^2)}{|1 + \varepsilon\lambda| \cdot |1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}|} + \frac{1}{|1 + \frac{1}{\varepsilon\lambda}|} \right]. \end{aligned}$$

Da $\varphi < \pi$, existiert eine Konstante K_φ so, dass für alle $\mu \in \Sigma_\varphi$ die Abschätzung $|1 + \mu| \geq K_\varphi$ gilt. Angewendet auf $\mu = \varepsilon\lambda$, $\mu = \frac{\varepsilon}{\lambda} \in \Sigma_\varphi$ bzw. $\mu = \frac{1}{\lambda\varepsilon} \in \Sigma_\varphi$ erhält man

$$\|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[\frac{M}{K_\varphi^2} + \frac{1}{K_\varphi} \right] = \frac{C}{|\lambda|}.$$

d) Die Konvergenz der Resolventen sieht man an der Darstellung in b). Für die Konvergenz von $A_\varepsilon x$ verwende

$$A_\varepsilon x - Ax = -\varepsilon(1 - \varepsilon A)^{-1}x \quad (x \in D(A)).$$

Wegen $\|\varepsilon(1 - \varepsilon A)^{-1}\| = \|(\frac{1}{\varepsilon} - A)^{-1}\| \leq C\varepsilon$ folgt $A_\varepsilon x \rightarrow Ax$ ($x \in D(A)$). \square

Wir wollen zu einem sektoriellen Operator A die Funktion $f(A)$ durch einen Dunford-Kalkül definieren. Da nun über einen unendlich langen Weg integriert werden muss, muss man die Menge der Funktionen einschränken. Beachte in folgender Definition, dass $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| > \varphi\} = -\Sigma_{\pi-\varphi}$.

4.15 Definition. Sei $\varphi \in (0, \pi]$. Zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ definiere

$$\|f\|_{\alpha, \beta}^\varphi := \sup\{|\lambda^\alpha f(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}, |\lambda| \leq 1\} + \sup\{|\lambda^{-\beta} f(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}, |\lambda| \geq 1\}.$$

Man setzt

$$\mathcal{H}_{\alpha, \beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) : \|f\|_{\alpha, \beta}^\varphi < \infty\}$$

und

$$\mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) := \bigcup_{\alpha, \beta < 0} \mathcal{H}_{\alpha, \beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}).$$

4.16 Satz (Ein Dunford-Kalkül für sektorielle Operatoren). Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A , und sei $\varphi < \varphi_A$. Fixiere $\psi \in (\varphi, \varphi_A)$ und betrachte die Kurve

$$\gamma_\psi := \{re^{-i\psi} : \infty > r \geq 0\} \cup \{re^{i\psi} : 0 \leq r < \infty\}.$$

Dann definiert

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}))$$

einen Algebren-Homomorphismus $\Phi_A: f \mapsto f(A)$, $\mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) \rightarrow L(X)$. Die Abbildung Φ_A ist stetig im Sinn, dass für alle $\alpha, \beta < 0$ ein $C_{\alpha, \beta} > 0$ existiert mit

$$\|f(A)\|_{L(X)} \leq C_{\alpha, \beta} \|f\|_{\alpha, \beta}^\varphi \quad (f \in \mathcal{H}_{\alpha, \beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})).$$

Falls A sektoriell, beschränkt und invertierbar ist, stimmt die obige Definition mit dem Dunford-Kalkül aus Definition 4.11 überein.

Für $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ gilt ferner $f(A_\varepsilon) \rightarrow f(A)$ in $L(X)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, und die Menge $\{f(A_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \subset L(X)$ ist beschränkt.

Beweis. (i) Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Wegen $\psi < \varphi_A$ existiert ein $M_A > 0$ mit

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_\psi)). \quad (4-1)$$

Nach Lemma 4.14 c) gilt diese Abschätzung (nach eventueller Vergrößerung von M_A) auch für A_ε anstelle von A .

Sei $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$, d.h. es existieren $\alpha, \beta < 0$ mit $f \in \mathcal{H}_{\alpha, \beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$. Für $\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_\psi)$ gilt dann

$$|f(\lambda)| \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \begin{cases} M_A \|f\|_{\alpha, \beta}^\varphi |\lambda|^{-1-\alpha}, & |\lambda| \leq 1, \\ M_A \|f\|_{\alpha, \beta}^\varphi |\lambda|^{-1+\beta}, & |\lambda| \geq 1. \end{cases}$$

Somit ist

$$h_f(\lambda) := M_A \|f\|_{\alpha, \beta}^\varphi (|\lambda|^{-1-\alpha} \chi_{\{|\lambda| \leq 1\}}(\lambda) + |\lambda|^{-1+\beta} \chi_{\{|\lambda| \geq 1\}}(\lambda))$$

eine integrierbare Majorante von $f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}$ auf γ_ψ . Da A_ε ebenfalls der Abschätzung (4-1) genügt, ist h_f auch eine simultane Majorante von $f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}$ für alle $\varepsilon > 0$.

(ii) Sei zunächst A sektoriell, beschränkt und invertierbar. Dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\varphi_A}$ kompakt. Wegen $0 \notin \sigma(A)$ existieren $r > 0$ und $R > 0$ so, dass $\sigma(A)$ von der Kurve $\gamma_{\psi, r, R}$ eingeschlossen wird, wobei $\gamma_{\psi, r, R} := r e^{i[-\psi, \psi]} \cup [r, R] e^{i\psi} \cup R e^{i[\psi, -\psi]} \cup [R, r] e^{-i\psi}$. Dies gilt z.B. für $R > \|A\|$ und $r < \|A^{-1}\|^{-1}$.

Für $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ gilt nach dem beschränkten Dunford-Kalkül

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, r, R}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Nach dem Cauchy-Integralsatz hängt der Wert des Integrals nicht von r und R ab, falls r hinreichend klein und R hinreichend groß ist. Nach Teil (i) des Beweises ist

$f(\cdot)(\cdot - A)^{-1}$ auf γ_ψ integrierbar, und wir erhalten im Limes $r \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ die Darstellung

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

(iii) Sei nun A unbeschränkt. Wir wenden Teil (ii) auf die Approximationen A_ε an und erhalten

$$f(A_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda.$$

Nach Lemma 4.14 d) gilt $(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \rightarrow (\lambda - A)^{-1}$ in $L(X)$ für $\varepsilon \searrow 0$. Nach Teil (i) des Beweises existiert eine integrierbare Majorante h_f , d.h. das Integral $f(A) \in L(X)$ ist wohldefiniert, und mit majorisierter Konvergenz folgt $f(A_\varepsilon) \rightarrow f(A)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) in $L(X)$. Die Definition von h_f zeigt außerdem, dass $\|f(A)\| \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\alpha,\beta}^\varphi$ wie auch $\|f(A_\varepsilon)\| \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\alpha,\beta}^\varphi$ gilt. Insbesondere ist Φ_A stetig und die Familie $\{f(A_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \subset L(X)$ beschränkt.

Schließlich gilt $(fg)(A_\varepsilon) = f(A_\varepsilon)g(A_\varepsilon)$ nach Satz 4.12, und für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir $(fg)(A) = f(A)g(A)$, d.h. Φ_A ist ein Algebren-Homomorphismus. \square

4.17 Definition und Satz. Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A , und sei $\varphi < \varphi_A$. Sei

$$\mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) := \left\{ f \in \bigcup_{\beta < 0} \mathcal{H}_{0,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) : f \text{ holomorph an der Stelle } 0 \text{ fortsetzbar} \right\}.$$

Zu $f \in \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ definiere

$$f_0(\lambda) := f(\lambda) - \frac{f(0)}{1 - \lambda}.$$

Dann gilt $f_0 \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$. Definiere

$$f(A) := f_0(A) + f(0)(1 - A)^{-1}.$$

Beweis. Wie etwa der Mittelwertsatz der Differentialrechnung zeigt, ist eine Funktion $f \in \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ genau dann in $\mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, wenn $f(0) = 0$ ist. Dies ist für f_0 der Fall, also ist $f_0(A)$ nach Satz 4.16 definiert. \square

4.18 Satz. Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A , und sei $\varphi < \varphi_A$. Betrachte für $\psi \in (\varphi, \varphi_A)$ und $\delta > 0$ die Kurve

$$\gamma_{\psi,\delta} := (\infty, \delta]e^{-i\psi} \cup \delta e^{[-\psi, \psi]} \cup [\delta, \infty)e^{i\psi}$$

(„Schlüssellochweg“). Dann gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$ die Gleichheit

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (f \in \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})).$$

Die Abbildung $\Phi: \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) \rightarrow L(X)$, $f \mapsto f(A)$ ist wohldefiniert und ein Algebra-Homomorphismus. Die Konvergenzaussagen von Satz 4.16 gelten analog.

Beweis. Wir approximieren wieder den Operator A durch A_ε . Nach dem Cauchy-schen Integralsatz gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$

$$\begin{aligned} f(A_\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} f_0(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} f(0)(1 - \lambda)^{-1}(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f_0(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda + f(0)(1 - A_\varepsilon)^{-1} \\ &= f_0(A_\varepsilon) + f(0)(1 - A_\varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

Wir nehmen den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$: Nach Lemma 4.14 gilt $(1 - A_\varepsilon)^{-1} \rightarrow (1 - A)^{-1}$, nach Satz 4.16 gilt $f_0(A_\varepsilon) \rightarrow f_0(A)$, und mit majorisierter Konvergenz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = f_0(A) + f(0)(1 - A)^{-1} = f(A).$$

Beachte hierbei, dass $f(\cdot)(\cdot - A)^{-1}$ auf $\gamma_{\psi, \delta}$ integrierbar ist. Wie im Beweis von Satz 4.16 folgen die Konvergenzaussagen von $f(A_\varepsilon)$ gegen $f(A)$ und damit die Multiplikatивität von Φ aus der Gleichheit $(fg)(A_\varepsilon) = f(A_\varepsilon)g(A_\varepsilon)$. \square

4.19 Korollar. a) Sei A sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A > 0$. Für $\mu \in \Sigma_{\varphi_A}$ gilt

$$(\mu - A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} \frac{1}{\lambda - \mu} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

b) Sei A sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, und sei $\vartheta \in (0, \varphi_A - \frac{\pi}{2})$. Dann ist für $z \in \Sigma_\vartheta$ der Operator

$$\exp(zA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} e^{z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \in L(X)$$

wohldefiniert. Es gilt

$$\exp(z_1 A) \exp(z_2 A) = \exp((z_1 + z_2)A) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\vartheta).$$

Die Abbildung $z \mapsto \exp(zA)$, $\Sigma_\vartheta \rightarrow L(X)$ ist holomorph.

Beweis. a) Die Funktion $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda - \mu}$ gehört zu $\mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, wobei $\varphi < \varphi_A$ so groß gewählt wird, dass $\mu \in \Sigma_\varphi$ gilt. Damit folgt die Aussage aus Satz 4.18 (beachte, dass $(\mu - A_\varepsilon)^{-1} \rightarrow (\mu - A)^{-1}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$).

b) Wähle $\varphi \in (\vartheta + \frac{\pi}{2}, \varphi_A)$. Für $z \in \Sigma_\vartheta$ gilt dann $\lambda \mapsto e^{\lambda z} \in \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, und die Wohldefiniertheit und die Multiplikativität folgen aus Satz 4.18. Zum Nachweis der Holomorphie beachte man, dass $\lambda \mapsto \lambda e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1}$ über $\gamma_{\psi, \delta}$ integrierbar ist. Nach dem Satz über parameterabhängige Integrale existiert also die komplexe Ableitung $\frac{d}{dz} \exp(zA) \in L(X)$ für alle $z \in \Sigma_\vartheta$, d.h. $\exp(\cdot A)$ ist holomorph. \square

4.20 Bemerkung. a) Wir haben den Dunford-Kalkül für Funktionen $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ sowie für $f \in \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ definiert. Eine weitere Verallgemeinerung ist (unter der Zusatzbedingung, dass $R(A)$ dicht in X ist) möglich auf alle Funktionen f , welche holomorph im Sektor $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi$ und polynomial beschränkt an der Stelle 0 und bei Unendlich sind. Der dadurch definierte Operator ist nicht notwendigerweise beschränkt, man spricht von einem erweiterten Dunford-Kalkül.

b) Ein Operator $A: X \supset D(A) \rightarrow X$ besitzt einen beschränkten H^∞ -Kalkül (mit Winkel φ_A), falls A sektoriell mit spektralem Winkel φ_A ist, $R(A)$ dicht in X ist und für alle $\varphi < \varphi_A$ die Abschätzung

$$\|f(A)\|_{L(X)} \leq C_\varphi \|f\|_\infty \quad (f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi))$$

gilt. In diesem Fall ist $f(A)$ für alle $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) : f \text{ beschränkt}\}$ definiert, und die obige Abschätzung gilt für alle $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$.

c) Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A > \frac{\pi}{2}$. Seien weiter $R(A)$ dicht in X , $s \in \mathbb{R}$ und $h_s(\lambda) := \lambda^{is}$. Dann kann im erweiterten Dunford-Kalkül der Operator $A^{is} := h_s(A)$ definiert werden. Falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit $A^{is} \in L(X)$ und

$$\|A^{is}\|_{L(X)} \leq C \quad (|s| \leq 1),$$

so sagt man, dass A beschränkte imaginäre Potenzen besitzt, kurz $A \in BIP(X)$.

c) Generatoren holomorpher Halbgruppen

4.21 Lemma. Sei T eine differenzierbare Halbgruppe, d.h. die Abbildung $(0, \infty) \rightarrow X$, $t \mapsto T(t)x$ sei differenzierbar für alle $x \in X$. Sei A der Generator von T . Dann gilt $T(t)x \in D(A^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $t \mapsto T(t)x \in C^\infty((0, \infty), X)$ mit

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x \quad (t > 0, x \in X).$$

Es gilt weiter $A^n T(t) \in L(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n .

(i) $n = 1$: Sei $x \in X$. Da $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar ist, folgt $T(t)x \in D(A)$ für alle $t > 0$ (denn für $y := T(t)x$ existiert $T'(0)y = T'(t)x$ sowie $T'(t)x = AT(t)x$. Da A abgeschlossen ist und $T(t) \in L(X)$, ist auch $AT(t)$ abgeschlossen mit Definitionsbereich X . Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen gilt $AT(t) \in L(X)$.

(ii) $n \rightarrow n + 1$: Sei $s > 0$. Dann ist

$$(s, \infty) \rightarrow X, t \mapsto T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x$$

nach Schritt (i) differenzierbar mit Ableitung

$$T^{(n+1)}(t)x = \frac{d}{dt} T(t-s)A^n T(s)x = AT(t-s)A^n T(s)x = A^{n+1}T(t)x.$$

Wegen $A^n T(t) \in L(X)$ nach (i) folgt wie oben $A^{n+1}T(t) = A(A^n T(t)) \in L(X)$. \square

Man erhält folgende Charakterisierung für holomorphe Halbgruppen.

4.22 Satz. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \rightarrow X$ linear. Äquivalent sind:

- (i) A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.
- (ii) A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.

Beweis. (i) \implies (ii). Sei $\tilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$. Für $\alpha \in (-\tilde{\vartheta}, \tilde{\vartheta})$ definiere $S(t) := T(\exp(i\alpha)t)$ ($t \geq 0$). Nach Lemma 4.5 (i) und (ii) ist S eine C_0 -Halbgruppe. Sei B ihr Erzeuger, dann gilt $x \in D(B)$ genau dann, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$ existiert. Dies ist aber äquivalent dazu, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(\exp(i\alpha)t)x - x}{\exp(i\alpha)t}$ existiert. Nach Lemma 4.5 (iii) ist dies genau dann der Fall, wenn $x \in D(A)$. Also ist $D(A) = D(B)$ und $B = \exp(i\alpha)A$.

Aus Theorem 3.3 folgt $(0, \infty) \subset \rho(\exp(i\alpha)A)$ und

$$(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T(e^{i\alpha}t) dt \quad (\lambda > 0). \quad (4-2)$$

Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $M = M(\tilde{\vartheta})$ mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \leq M \quad (z \in \Sigma_{\tilde{\vartheta}}).$$

Wegen

$$\int_0^\infty |\exp(-\lambda t)| \|T(e^{i\alpha}t)\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda} \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0) \quad (4-3)$$

ist das Integral auf der rechten Seite von (4-2) sogar für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$ konvergent und dort eine holomorphe Funktion von λ .

Da beide Seiten von (4-2) holomorph in λ sind, folgt die Gleichheit (4-2) für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2} \cap \rho(e^{i\alpha}A)$.

Angenommen, es existiert ein $\lambda_0 \in \sigma(e^{i\alpha}A) \cap \Sigma_{\pi/2}$. Sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \rho(e^{i\alpha}A) \cap \Sigma_{\pi/2}$ eine Folge mit $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Wegen $\|(\lambda - A)^{-1}\| \geq [\text{dist}(\lambda, \sigma(A))]^{-1}$ für alle $\lambda \in \rho(A)$ folgt $\|(\lambda_n - A)^{-1}\| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dies ist aber ein Widerspruch zu (4-3). Somit erhalten wir $\rho(e^{i\alpha}A) \supset \Sigma_{\pi/2}$.

Insgesamt haben wir $e^{-i\alpha}\lambda \in \rho(A)$ für alle $|\alpha| < \tilde{\vartheta}$ und alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$, d.h. $\Sigma_{\tilde{\vartheta}+\pi/2} \supset \rho(A)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\tilde{\vartheta} + \varepsilon < \vartheta$. Für $z \in \Sigma_{\tilde{\vartheta}+\pi/2}$ existiert ein $\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon}$ und ein α mit $|\alpha| < \vartheta + \varepsilon$ und $z = e^{-i\alpha}\lambda$. Aus (4-2) folgt

$$\|(z - A)^{-1}\| = \|(e^{-i\alpha}\lambda - A)^{-1}\| = \|(\lambda - B)^{-1}\| \leq \frac{M}{\text{Re } \lambda} \leq \frac{M}{C_\varepsilon|\lambda|},$$

wobei wir die Abschätzung $\text{Re } \lambda \geq C_\varepsilon|\lambda|$ ($\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon}$) verwendet haben. Für alle $\lambda \in \Sigma_{\tilde{\vartheta}+\pi/2}$ folgt wegen $\text{Re } \lambda \geq C|\lambda|$ und (4-3) die Abschätzung

$$\sup\{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\psi\} < \infty \quad (\psi \in (0, \tilde{\vartheta} + \frac{\pi}{2})).$$

Da $\tilde{\vartheta} < \vartheta$ beliebig war, ist A sektoriell mit Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.

(ii) \implies (i). Sei $z \in \Sigma_\vartheta$. Wähle φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} + |\arg z| < \varphi < \psi < \varphi_A$ und definiere

$$T(z) := \exp(zA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Da $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ in ganz \mathbb{C} holomorph ist, kann man hier $\delta > 0$ beliebig wählen. Nach Korollar 4.19 ist $T: \Sigma_\vartheta \rightarrow L(X)$ holomorph und erfüllt die Funktionalgleichung. Da $\lambda \mapsto Ce^{\lambda z} \max\{|\lambda|^{-1}, 1\}$ mit einer Konstanten $C > 0$ ein integrierbare Majorante von $e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1}$ auf $\gamma_{\psi,\delta}$ ist, folgt

$$\sup\{\|T(z)\| : z \in \Sigma_\psi\} < \infty \quad (\psi \in (0, \vartheta)).$$

Wir zeigen nun, dass T stark stetig ist. Seien $x \in D(A)$ und $z > 0$. Es gilt $\lambda(\lambda - A)^{-1}x = x + (\lambda - A)^{-1}Ax$, also

$$\begin{aligned} T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \\ &= x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda. \end{aligned}$$

Wir schätzen das letzte Integral auf jeder Wegstrecke ab, wobei wir $\delta := \frac{1}{z}$ wählen. Mit der Parametrisierung $\lambda = re^{i\psi}$, $r \in [\delta, \infty)$, erhalten wir

$$\left\| \int_{[z^{-1}, \infty) e^{i\psi}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x d\lambda \right\| \leq \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} A x\| dr.$$

Wegen $\psi > \frac{\pi}{2}$ existiert eine positive Konstante c mit $\operatorname{Re}(\lambda z) \leq -c|\lambda|z$ ($\arg \lambda = \psi$). Damit erhalten wir $|\exp(rze^{i\psi})| \leq \exp(-crz)$ ($r > 0$). Eingesetzt erhalten wir unter Verwendung der Resolventenabschätzung $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} A x\| dr &\leq \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-czz}}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} A x\| dr \\ &\leq M \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-czz}}{r^2} \|A x\| dr \\ &= Mz \int_1^{\infty} \frac{e^{-cs}}{s^2} ds \|A x\| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit wurde $s = zr$ substituiert. Analog erhalten wir

$$\int_{(\infty, \delta] e^{-i\psi}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x d\lambda \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0).$$

Für den Bogen $z^{-1}e^{[-i\psi, i\psi]}$ wählen wir die Parametrisierung $\lambda = z^{-1}e^{i\alpha}$, $\alpha \in [-\psi, \psi]$. Damit ist

$$\begin{aligned} \left\| \int_{z^{-1}e^{[-i\psi, i\psi]}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x d\lambda \right\| &\leq \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(z^{-1}e^{i\alpha}z)| \|(z^{-1}e^{i\alpha} - A)^{-1} A x\| d\alpha \\ &\leq Mz \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha \|A x\| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $T(z)x - x \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 0$) für alle $x \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X ist, ist T stark stetig.

Nach dem bisher Bewiesenen ist T eine C_0 -Halbgruppe. Es bleibt noch zu zeigen, dass T von A erzeugt wird. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} e^{\lambda z} \lambda (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{\gamma_{\psi, \delta}} e^{\lambda z} x d\lambda}_{=0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} A x d\lambda = T(z)A x \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dz} T(z)x = T(z)A x \xrightarrow{|z| \rightarrow 0} A x.$$

Sei B der Generator von T . Dann folgt $D(A) \subset D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Wegen $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ist deshalb $A = B$. \square

4.23 Beispiele. a) Der Laplaceoperator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ hat nach Beispiel 3.6 die Resolvente

$$(\lambda - \Delta)^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2} \right] \mathcal{F}.$$

Für Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ können wir abschätzen

$$\frac{1}{|\lambda + |\xi|^2|} = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{Re} \lambda + |\xi|^2)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2}} \leq \frac{C_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Aus dem Satz von Plancherel (Unitarität von \mathcal{F}) folgt

$$\|\lambda(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{L(X)} \leq C_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi),$$

also ist Δ der Generator einer beschränkten holomorphen C_0 -Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$.

b) Der Schrödingeroperator $i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt nach Bemerkung 3.7 eine C_0 -Gruppe, insbesondere sind alle $T(t)$ invertierbar mit Inversem $T(-t)$. Daher kann es nicht sein, dass

$$T(t)u \in D(A) \quad (u \in L^2(\mathbb{R}^n), t > 0).$$

Das bedeutet T ist weder differenzierbar noch holomorph. Das kann man sich auch daran klarmachen, dass das Spektrum $\sigma(i\Delta)$ gerade durch Rotation um $i = \exp(i\pi/2)$ aus $\sigma(\Delta) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ hervorgeht. Man findet keine in die linke Halbebene (negativer Realteile) hineinreichende Sektoren, die in $\rho(i\Delta)$ liegen.

Wir wollen auch noch die folgende, für Anwendungen wichtige, reelle Charakterisierung holomorpher Halbgruppen zeigen.

4.24 Satz. Sei A der Generator einer beschränkten C_0 -Halbgruppe T auf dem Banachraum X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) T ist beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe,
- (ii) T ist differenzierbar und $\sup_{t>0} \|tAT(t)\|_{L(X)} < \infty$.

Beweis. (i) \implies (ii). Nach Definition ist T differenzierbar mit $T'(t) = AT(t) \in L(X)$ (siehe Lemma 4.21). Wie im Beweis von Satz 4.22 wählen wir φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \psi < \varphi_A$. Für festes $t > 0$ gilt dann $f(\lambda) := \lambda e^{\lambda t} \in \mathcal{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, und wegen $f(A_\varepsilon) \rightarrow f(A)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) folgt

$$AT(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi, \delta}} \lambda e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Wieder können wir $\delta > 0$ beliebig wählen, da $t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ eine ganze Funktion ist. Wir setzen $\delta := t^{-1}$ und erhalten mit einer Konstanten $c > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|AT(t)\|_{L(X)} &\leq C \left(\int_{t^{-1}}^{\infty} e^{-ctr} dr + \frac{1}{t} \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{t} + \frac{2\psi \exp(1)}{t} \right) = \frac{C}{t}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\sup_{t>0} \|tAT(t)\|_{L(X)} < \infty$.

(ii) \implies (i). Nach Lemma 4.21 gilt $T^{(k)}(t) = A^k T(t)$ ($t > 0, k \in \mathbb{N}$). Die Taylor-Formel mit Integraldarstellung des Restgliedes R_N liefert für $t > 0$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < t$

$$T(t+h) = \sum_{k=0}^N \frac{h^k}{k!} T^{(k)}(t) + \frac{1}{N!} \int_t^{t+h} (t+h-s)^N T^{(N+1)}(s) ds.$$

Mit der Voraussetzung $\|tAT(t)\|_{L(X)} \leq M$ und der Stirlingschen Formel $n^n \leq \exp(n)n!$ folgt

$$\begin{aligned} \|T^{(k)}(t)\|_{L(X)} &= \|A^k T(t)\|_{L(X)} = \left(\frac{k}{t}\right)^k \left\| \left[\frac{t}{k} AT\left(\frac{t}{k}\right) \right]^k \right\|_{L(X)} \\ &\leq \left(\frac{Mk}{t}\right)^k \leq \left(\frac{Me}{t}\right)^k k!. \end{aligned}$$

In obiges Integral eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{N!} \int_t^{t+h} (t+h-s)^N T^{(N+1)}(s) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{N!} \left| \int_t^{t+h} |t+h-s|^N \left(\frac{Me}{s}\right)^{N+1} (N+1)! ds \right| \\ &\leq (N+1) \left(|h| \frac{Me}{t-|h|} \right)^{N+1}. \end{aligned}$$

Sei nun $q < 1$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \frac{qt}{Me+1}$. Dann gilt

$$|h| \frac{Me}{t-|h|} \leq \frac{qtMe}{(Me+1)(t-\frac{qt}{Me+1})} = \frac{qtMe}{Met+t-qt} = q \frac{Me}{Me+1-q} \leq q,$$

und somit konvergiert das Restglied der Taylorreihe gegen 0. Für solche h existiert daher die Taylorreihe und es gilt

$$T(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} T^{(k)}(t).$$

Wegen $\|T^{(k)}(t)\| \leq \left(\frac{Me}{t}\right)^k k!$ konvergiert die Reihe aber auch für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| \leq \frac{qt}{Me+1}$. Daher besitzt T eine analytische Fortsetzung auf den Sektor Σ_φ mit $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{Me+1}\right)$. Sei nun $\tilde{\varphi} \in (0, \varphi)$. Für $z \in \Sigma_{\tilde{\varphi}}$ gilt (mit einem $q \in (0, 1)$),

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \leq \tan \tilde{\varphi} = q \cdot \tan \varphi = \frac{q}{Me+1}.$$

und damit

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}(Me+1) \leq q < 1 \quad (z \in \Sigma_{\tilde{\varphi}}).$$

Wir schreiben $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = t + ih$ und erhalten

$$\|T(z)\|_{L(X)} = \|T(t + ih)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} h^k \left(\frac{Me}{t}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (z = t + ih \in \Sigma_{\tilde{\varphi}}).$$

Also ist $T : \Sigma_\varphi \rightarrow L(X)$ beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe. \square

d) Das inhomogene Cauchy-Problem

Sei nun A der Generator einer beschränkten C_0 -Halbgruppe $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ auf dem Banachraum X . Betrachte das inhomogene Cauchy - Problem

$$(ICP)_{f,x} \begin{cases} u'(t) - Au(t) &= f(t), & t \in (0, T), \\ u(0) &= x \in X, \end{cases}$$

Zunächst wollen wir geeignete Lösungsbegriffe einführen.

4.25 Definition. Sei $T > 0$, $x \in X$ und $f \in C((0, T), X)$. Eine Funktion $u : [0, T) \rightarrow X$ heißt *klassische Lösung von $(ICP)_{f,x}$* , falls

- (i) $u \in C([0, T), X) \cap C^1((0, T), X) \cap C((0, T), D(A))$,
- (ii) u löst $(ICP)_{f,x}$.

4.26 Bemerkung. Gilt $f = 0$, dann folgt aus der Holomorphie von $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ sofort (i) für $u(t) = \exp(tA)x$. Weiterhin gilt $\exp(tA)x \rightarrow x$ für $t \rightarrow 0$, und nach Bemerkung 4.21 gilt $AT(t) = T'(t) \in L(X)$ für $t > 0$, d.h. u ist eine klassische Lösung zu $(ICP)_{0,x}$.

4.27 Satz (Variation der Konstanten-Formel). Sei $x \in X$, $T > 0$ und $f \in L^1((0, T), X) \cap C((0, T), X)$. Ist u eine klassische Lösung zu $(ICP)_{f,x}$, dann gilt

$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-s)A)f(s)ds, \quad t \in (0, T). \quad (4-4)$$

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion

$$v(s) := \exp((t-s)A)u(s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Dann gilt $v \in C([0, T], X) \cap C^1((0, T), X) \cap C((0, T), D(A))$ und

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= -A \exp((t-s)A)u(s) + A \exp((t-s)A)u(s) + \exp((t-s)A)f(s) \\ &= \exp((t-s)A)f(s). \end{aligned}$$

Außerdem, $v(0) = \exp(tA)x$ und $u(t) = v(t)$. Für $\varepsilon > 0$ ergibt sich

$$u(t) = v(t) = v(\varepsilon) + \underbrace{\int_{\varepsilon}^t \exp((t-s)A)f(s) ds}_{\in L^1((0, T), X)}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. \square

4.28 Bemerkung. Ist f gegeben wie in Satz 4.27, impliziert dieser Satz auch die Eindeutigkeit von klassischen Lösungen.

4.29 Definition. Sei X ein Banachraum, $f \in L^1((0, T), X)$, $x \in X$. Dann heißt u eine *milde Lösung* zu $(ICP)_{f,x}$, falls u (4.4) erfüllt.

Für milde Lösungen gilt offensichtlich $u \in C([0, T], X)$, jedoch müssen milde Lösungen i.a. keine klassischen Lösungen sein.

4.30 Satz. Sei X ein Banachraum, $x \in X$, $f \in C([0, T], X)$ und u eine milde Lösung zu $(ICP)_{f,x}$. Dann sind äquivalent:

- (i) u ist klassische Lösung.
- (ii) $u \in C((0, T), D(A))$.
- (iii) $u \in C^1((0, T), X)$.

Beweis. Klar sind (i) \Rightarrow (ii) sowie (i) \Rightarrow (iii).

(ii) \Rightarrow (i). Sei u eine milde Lösung. Man erhält

$$\begin{aligned} \int_0^t u(s) ds &= \int_0^t \exp(sA)x ds + \int_0^t \int_0^s \exp((s-r)A)f(r) dr ds \\ &= \int_0^t \exp(sA)x ds + \int_0^t \int_r^t \exp((s-r)A)f(r) ds dr \\ &= \int_0^t \exp(sA)x ds + \int_0^t \int_0^{t-r} \exp(\sigma A)f(r) d\sigma dr \end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.10 (ii) gilt

$$A \int_0^{t-r} \exp(\sigma A) f(r) d\sigma = \exp((t-r)A) f(r) - f(r) \in C([0, t], X),$$

letzteres bezüglich r . Nach Lemma 1.21 läßt sich der abgeschlossene Operator A ins Integral ziehen, d.h. man hat

$$A \int_0^t \int_0^{t-r} \exp(\sigma A) f(r) d\sigma dr = \int_0^t \exp((t-r)A) f(r) dr - \int_0^t f(r) dr$$

Aus der obigen Formel ergibt sich somit $\int_0^t u(s) ds \in D(A)$ und

$$A \int_0^t u(s) ds = -x + \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-r)A) f(r) dr - \int_0^t f(r) dr,$$

d.h. insgesamt

$$u(t) = x + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(r) dr, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ist nun $u \in C((0, T), D(A))$, dann folgt aus Bemerkung 1.24, dass

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Au(s) ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(r) dr \xrightarrow{h \rightarrow 0} Au(t) + f(t). \quad (4-5)$$

Also existiert $u'(t)$ und es gilt $u'(t) = Au(t) + f(t)$ für $t \in [0, T)$, d.h. u ist klassische Lösung.

(iii) \implies (i). Gilt $u \in C^1((0, T), X)$, dann existiert die linke Seite von (4-5) und somit konvergiert $A \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds$ für $h \rightarrow 0$ in X . Wiederum aus der Abgeschlossenheit von A folgt schließlich auch hier $Au(t) = u'(t) - f(t)$ für $t \in (0, T)$. \square

4.31 Korollar. Seien $x \in X$ und $f \in C((0, T), X)$. Gilt zusätzlich $f \in C([0, T), D(A))$, dann ist

$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp((t-s)A) f(s) ds$$

die eindeutige klassische Lösung zu $(ICP)_{f,x}$.

Beweis. Es gilt

$$\left(s \mapsto \exp((t-s)A) f(s) \right) \in C([0, t], D(A)).$$

Mit Lemma 1.21 erhält man

$$A \int_0^t \exp((t-s)A) f(s) ds = \int_0^{t/2} A \exp((t-s)A) f(s) ds + \int_{t/2}^t \exp((t-s)A) A f(s) ds.$$

Daraus ergibt sich

$$A \int_0^t \exp((t-s)A) f(s) ds \in C((0, T), X)$$

und somit $u \in C((0, T); D(A))$, d.h. u ist nach Satz 4.30 klassische Lösung. \square

Auch die Voraussetzung $f \in C([0, T]; X)$ reicht i.a. nicht um die Existenz einer klassischen Lösung zu garantieren. Es genügt allerdings, wenn man z.B. minimal stärkere Regularitätsvoraussetzungen in der Zeit annimmt. Der Vollständigkeit halber wollen zum Abschluss dieses Kapitels noch ein solches Resultat zitieren. Da wir dies im folgenden nicht benötigen, verzichten wir hier auf den Beweis.

4.32 Satz. *Sei X Banachraum, $x \in X$, $\alpha \in (0, 1)$ und $f \in C^\alpha((0, T), X)$. Dann ist die durch (4-4) definierte Funktion u die eindeutige klassische Lösung zu $(ICP)_{f,x}$.*

Ein Beweis findet sich z.B. in [4].

5. Anwendungen auf lineare Gleichungen im Hilbertraum

5.1 Worum geht's? Inzwischen kennen wir wichtige Charakterisierungen für Generatoren von C_0 -Halbgruppen. Da ein Operator genau dann eine C_0 -Halbgruppe erzeugt, wenn das zugehörige Cauchy-Problem klassisch wohlgestellt ist, sind die Eigenschaften konkreter Operatoren wesentlich für das Lösen partieller Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt werden einige Beispiele partieller Differentialgleichungen aus der Sichtweise der Halbgruppentheorie diskutiert.

a) Adjungierte Operatoren und der Satz von Stone

Wir beginnen mit einigen Aussagen über adjungierte Operatoren.

5.2 Bemerkung. Ein beschränkter Operator $B \in L(H)$ in einem Hilbertraum H heißt unitär, falls B invertierbar ist und $B^* = B^{-1}$ gilt. Eine C_0 -Gruppe $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ heißt unitäre Gruppe, falls $T(t)$ für jedes $t \geq 0$ unitär ist. In diesem Fall gilt $T(t)^* = T(t)^{-1} = T(-t)$, wobei die letzte Gleichheit aus der Gruppeneigenschaft folgt. Im Beweis von Satz 3.8 haben wir gesehen, dass die C_0 -Halbgruppe $(T(-t))_{t \geq 0}$ von $-A$ erzeugt wird.

5.3 Beispiel. Sei A gegeben durch $A = \frac{d}{dx}$ in $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $D(A) = W_p^1(\mathbb{R})$. Dann ist der adjungierte Operator A' gegeben durch $A' = -A$ in $L^{p'}(\mathbb{R})$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $D(A') = W_{p'}^1(\mathbb{R})$.

5.4 Beispiel. a) $A = \Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ ist selbstadjungiert (Übungsaufgabe).

b) Der Schrödingeroperator $A_s = i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $D(A_s) = H^2(\mathbb{R}^n)$ ist schief selbstadjungiert, d.h. es gilt

$$A_s^* = -A_s.$$

Wegen

$$\exp(it\Delta)^* = (\mathcal{F}^{-1} \exp(it|\xi|^2) \mathcal{F})^* = \mathcal{F}^{-1} \exp(-it|\xi|^2) \mathcal{F} = \exp(-it\Delta) = \exp(it\Delta)^{-1}$$

erzeugt A_s eine unitäre Gruppe.

5.5 Bemerkung. Falls X reflexiv ist und A der Generator einer C_0 -Halbgruppe T auf X ist, so ist auch T' eine C_0 -Halbgruppe und wird vom adjungierten Operator A' erzeugt (Beweis Übung).

5.6 Satz (Stone '32). Sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \rightarrow H$ linear mit $\overline{D(A)} = H$. Dann ist A genau dann Generator einer unitären Gruppe, wenn A schief-selbstadjungiert ist.

Beweis. (i) Sei A Generator einer unitären Gruppe. Nach Bemerkung 5.2 wird $(T(-t))_{t \geq 0}$ von $-A$ erzeugt. Da nach Voraussetzung $T(-t) = T(t)^*$ gilt und $T(t)^*$ von A^* erzeugt wird (Bemerkung 5.5), folgt $-A = A^*$.

(ii) Sei nun $A = -A^*$. Dann folgt für alle $x \in D(A)$ die Gleichheit $\langle Ax, x \rangle = -\langle x, Ax \rangle = -\overline{\langle Ax, x \rangle}$ und damit

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle = -\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle = 0 \quad (x \in D(A) = D(A^*)),$$

d.h. A und $-A = A^*$ sind beide dissipativ. Nach Lemma 3.16 (i) gilt $\|(I - A)x\| \geq \|x\|$ ($x \in D(A)$), analog für A^* . Daher ist $I - A$ injektiv und $R(I - A)$ ist abgeschlossen (vgl. Beweis von Lemma 3.16). Wegen $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$ folgt $1 \in \rho(A)$ und analog $1 \in \rho(A^*)$. Damit erzeugen nach dem Satz von Lumer-Phillips sowohl A als auch $-A = A^*$ eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe, d.h. A erzeugt eine C_0 -Gruppe T auf H .

Da $-A$ der Generator von $(T(-t))_{t \geq 0}$ ist und nach Bemerkung 5.5 A^* der Generator von T^* ist, folgt $T(-t) = T(t)^*$ ($t \in \mathbb{R}$), d.h. die C_0 -Gruppe T ist unitär. \square

5.7 Bemerkung. Eine äquivalente Formulierung des Satzes von Stone lautet: Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine unitäre starkstetige Gruppe in einem Hilbertraum H . Dann existiert ein selbstadjungierter Operator A in H mit $T(t) = \exp(itA)$ ($t \in \mathbb{R}$).

b) Die Wärmeleitungsgleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{C})$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen auf Ω :

$$(WLG) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega, u_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{C}). \end{cases}$$

Dabei ist $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$ gegeben. Die L^2 -Realisierung des Laplaceoperators mit Dirichlet-Randbedingungen ist gegeben durch

$$\Delta_D := \Delta, \quad D(\Delta_D) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

5.8 Satz. Der Operator Δ_D erzeugt eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega)$. Insbesondere ist (WLG) wohlgestellt, und somit existiert zu jedem $u_0 \in D(\Delta_D)$ genau eine klassische Lösung u .

Beweis. Wegen $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(\Delta_D)$ ist Δ_D dicht definiert. Ferner gilt

$$\langle \Delta_D u, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\Delta u) \bar{u} dx = - \int_{\Omega} \nabla u \overline{\nabla u} dx = - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (u \in D(\Delta_D)),$$

und somit ist Δ_D dissipativ. Die zu $1 - \Delta_D$ assoziierte Sesquilinearform $a: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{H^1}.$$

Zu $f \in L^2(\Omega)$ betrachte die Abbildung

$$F_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto \langle u, f \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Wegen

$$|\langle u, f \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

ist $F_f \in (H_0^1(\Omega))'$. Nach dem Satz von Lax und Milgram (oder dem Satz von Riesz über den Dualraum von Hilberträumen) folgt, dass zu jedem $f \in H_0^1(\Omega)$ genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ existiert mit

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (v \in H_0^1(\Omega)).$$

Wählt man hier speziell $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, so gilt nach Definition der distributionellen Ableitung

$$(1 - \Delta)u = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Wegen $u, f \in L^2(\Omega)$ folgt $\Delta u \in L^2(\Omega)$ und damit $u \in D(\Delta_D)$. Da $f \in L^2(\Omega)$ beliebig war, ist $1 - \Delta_D$ surjektiv. Nach dem Theorem von Lumer und Phillips erzeugt Δ_D somit eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega)$. Damit ist (WLG) klassisch wohlgestellt. \square

5.9 Bemerkung. a) Wir werden dieses Ergebnis später noch deutlich verbessern.

b) Falls $\partial\Omega$ genügend glatt ist (z.B. $C^{1,1}$), dann gilt

$$D(\Delta_D) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

5.10 Bemerkung. a) Das analoge Resultat gilt, wenn Δ durch $A := \operatorname{div}(a\nabla)$ ersetzt wird, wobei $a \in C(\overline{\mathbb{R}_+}, C^1(\Omega))$ mit $a(t, x) > \delta \quad ((t, x) \in (0, \infty) \times \Omega)$. Dies zeigt man unter Verwendung des Satzes von Lax-Milgram.

b) Mit Verallgemeinerungen des Satzes von Lax und Milgram kann ein entsprechendes Resultat für gewisse nicht-symmetrische A erhalten werden.

c) Auch für Neumann-Randbedingungen, d.h. für den Operator $\Delta_N = \Delta$ mit $D(\Delta_N) := \left\{ u \in H^2(\Omega) : \partial_\nu u \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$, wobei $\partial\Omega$ glatt und ν äußeres Normalenfeld, kann ein entsprechendes Resultat gezeigt werden. Hierbei ist $\partial_\nu u \Big|_{\partial\Omega} = 0$ zu verstehen im Sinne von

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \quad (\varphi \in H^1(\Omega)).$$

c) Die Schrödingergleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{C})$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten

$$(SG) \begin{cases} u_t - i\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Die L^2 -Realisierung des Schrödingeroperators ist gegeben durch

$$A_s := i\Delta, \quad D(A_s) = D(\Delta_D).$$

5.11 Satz. *Der Schrödinger-Operator A_s erzeugt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ eine starkstetige unitäre Gruppe. Insbesondere ist (SG) wohlgestellt.*

Beweis. Wegen $\langle \Delta_D u, v \rangle = \langle u, \Delta_D v \rangle$ für $u, v \in D(\Delta_D)$ ist Δ_D symmetrisch. Wir wissen bereits, dass $1 - \Delta_D$ surjektiv ist (Beweis von Satz 5.8). Wegen $N((1 - \Delta_D)^*) = [R(1 - \Delta_D)]^\perp$ folgt die Injektivität von $1 - \Delta_D^*$.

Wir haben somit $1 - \Delta_D^* \supset 1 - \Delta_D$, der Operator $1 - \Delta_D^*$ ist injektiv und $1 - \Delta_D$ surjektiv. Daraus folgt $D(\Delta_D) = D(\Delta_D^*)$, d.h. Δ_D ist selbstadjungiert. Somit ist A_s schief-selbstadjungiert, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Stone. \square

Der folgende Satz zeigt, dass überraschenderweise der Schrödinger-Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ keine C_0 -Halbgruppe erzeugt.

5.12 Satz (Hörmander '60). *Sei $1 < p < \infty$. Dann erzeugt der Schrödingeroperator A_s genau dann eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, wenn $p = 2$. Insbesondere ist (SG) in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \neq 2$ nicht wohlgestellt.*

Ein Beweis findet sich z.B. in [4], p. 176.

d) Die Wellengleichung: L^2 -Theorie

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten zunächst die um 1 verschobene Wellengleichung

$$(WG) \begin{cases} w_{tt} - (\Delta - 1)w = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ w|_{t=0} = w_0 & \text{in } \Omega, \\ w_t|_{t=0} = w_1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Dabei sei $w_0 \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $w_1 \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Man transformiert (WG) auf ein System erster Ordnung in der Zeit durch die Definitionen $u_1 := w$ und $u_2 := w_t$. Das zugehörige System erster Ordnung lautet somit

$$u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ w_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ (\Delta - 1)w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} u.$$

Dies gibt Anlass zur Definition des Operators

$$Au := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

im Hilbertraum $H := H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_H := \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega; \mathbb{R})},$$

wobei der Definitionsbereich durch $D(A) := D(\Delta_D) \times H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \subset H$ gegeben ist.

5.13 Satz. *Der oben definierte Operator A erzeugt eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$. Insbesondere besitzt (WG) für jedes $\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in D(A)$ eine eindeutige klassische Lösung.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\ &= \langle u_2, u_1 \rangle_{H^1} + \langle (\Delta - 1)u_1, u_2 \rangle_{L^2} \\ &= \langle u_2, u_1 \rangle_{L^2} + \langle \nabla u_2, \nabla u_1 \rangle_{L^2} - \langle \nabla u_1, \nabla u_2 \rangle_{L^2} - \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} = 0. \end{aligned}$$

Daher ist A dissipativ. Wir rechnen nach, dass $1 - A$ surjektiv ist. Dazu sei $f \in H$ gegeben. Wir suchen u mit

$$(1 - A)u = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - (\Delta - 1)u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu den Bedingungen

$$u_2 = u_1 - f_1, \quad 2u_1 - \Delta u_1 = f_1 + f_2.$$

Da Δ_D Generator einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe ist (Satz 5.8), folgt $2 \in \rho(\Delta_D)$. Daher existiert genau ein $u_1 \in D(\Delta_D)$ mit $2u_1 - \Delta u_1 = f_1 + f_2$. Mit $u_2 := u_1 - f_1 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ gilt $(1 - A)u = f$, d.h. $1 - A$ ist surjektiv. Nach dem Satz von Lumer-Phillips erzeugt A eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Also ist die erste Komponente des Vektors $\exp(tA) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$ die eindeutige Lösung zu (WG). \square

5.14 Bemerkung. a) Der Operator $-A$ ist ebenfalls dissipativ und $1 + A$ ist surjektiv. Daher erzeugt nach dem Satz von Lumer-Phillips auch $-A$ eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe. Somit generiert A eine C_0 -Kontraktionsgruppe auf $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Die eigentliche Wellengleichung führt zum Operator $\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$. Dieser erzeugt eine C_0 -Gruppe, die allerdings nicht kontraktiv ist. Hierauf werden wir später im Kapitel über Störungstheorie zurückkommen.

e) Die Stokesgleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Stokesgleichung ist gegeben durch das System

$$(SG) \begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Unbekannt ist hier nicht nur das Geschwindigkeitsfeld $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, sondern auch der Druck $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Um Resultate der Halbgruppentheorie anwenden zu können, muss zunächst (SG) ein Grundraum sowie ein geeigneter Operator zugeordnet werden. Unter der Annahme, dass eine genügend glatte Lösung existiert, ergibt sich

$$0 = (\operatorname{div} u)|_{t=0} = \operatorname{div} (u|_{t=0}) = \operatorname{div} u_0.$$

Um die Wohlgestellttheit zu garantieren, muss also a priori schon $\operatorname{div} u_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Diese Bedingung nimmt man daher schon in die Definition des Grundraums auf. Dies ist die Motivation der folgenden Definition.

5.15 Definition. a) Sei $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) := \{v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}) : \nabla v \in L^2(\Omega; \mathbb{R})\}$. Definiere auf $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R})$ die Äquivalenzrelation $u \sim v : \Leftrightarrow u - v = \text{const}$. Dann heißt die Menge der Äquivalenzklassen $\dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) := \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) / \sim$ der homogene L^2 -Sobolevraum der Ordnung 1. Auf $\dot{H}^1(\Omega)$ wird das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{\dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R})} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (u, v \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}))$$

erklärt.

b) Die Menge

$$L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) : \langle u, \nabla\varphi \rangle_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)} = 0 \quad (\varphi \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}))\}$$

heißt der Unterraum der divergenzfreien L^2 -Vektorfelder auf Ω .

5.16 Bemerkung. Der Raum $\dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R})$ ist ein Hilbertraum. Dies wird hier nicht bewiesen.

5.17 Lemma. a) Die Teilräume $L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $G_2(\Omega; \mathbb{R}^n) := \{\nabla q : q \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R})\}$ sind beide abgeschlossen in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

b) Für $u \in L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n)$ gilt $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

c) Sei Ω ein C^1 -Gebiet und $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenvektorfeld. Dann gilt für $u \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n)$ die Gleichheit $u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$.

Beweis. a) Die Abbildung $T : \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $q \mapsto \nabla q$ ist nach Definition der Normen eine Isometrie zwischen zwei Hilberträumen. Daher ist $G_2(\Omega; \mathbb{R}^n) = R(T)$ abgeschlossen. Wegen $L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n) = (G_2(\Omega; \mathbb{R}^n))^\perp$ ist auch $L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen.

b) Wegen $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ folgt für $u \in L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n)$ insbesondere $\langle u, \nabla\varphi \rangle = 0$ ($\varphi \in D(\Omega; \mathbb{R})$), d.h. $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

c) Nach dem Satz von Gauß gilt für $u \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi(u \cdot \nu) dS(x) &= \int_{\partial\Omega} (\varphi u) \cdot \nu dS(x) \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi u) dx = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} u dx + \int_{\Omega} u \nabla\varphi dx = 0, \end{aligned}$$

d.h. $u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$. □

Allgemein erfüllen die Funktionen in $L^2_\sigma(\Omega)$ die Bedingung aus Teil c) des vorigen Lemmas in einem schwachen Sinne. Dies kann rigoros definiert werden, auf was wir hier allerdings nicht weiter eingehen wollen. Beachte, dass die plausible physikalische Interpretation dieser Bedingung darin besteht, dass in Normalenrichtung keine Flüssigkeit durch den festen Rand treten kann.

5.18 Definition (Helmholtz-Zerlegung). Die orthogonale Zerlegung

$$L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = L^2_\sigma(\Omega; \mathbb{R}^n) \oplus G_2(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{5-1}$$

heißt die Helmholtz-Zerlegung von $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Die zu (5-1) gehörende orthogonale Projektion $P_\Omega : L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow L_\sigma^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $N(P_\Omega) = G_2(\Omega)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.

5.19 Bemerkung. (5-1) ist die aus der Physik bekannte Tatsache, dass gewisse Vektorfelder f eine eindeutige Zerlegung $f = f_1 + f_2$ besitzen mit $\operatorname{div} f_1 = 0$ und $\operatorname{rot} f_2 = 0$. Beispielsweise gilt (5-1) für $L^q(\Omega)$ für $1 < q < \infty$, wenn Ω beschränkt der Klasse C^1 ist, nicht jedoch z.B. in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^k(\Omega)$.

Die Anwendung von P_Ω auf die erste Zeile von (SG) ergibt

$$0 = P_\Omega(\partial_t u - \Delta u + \nabla p) = \partial_t u - P_\Omega \Delta u.$$

Damit reduziert sich (SG) zum Cauchyproblem

$$\begin{cases} u' - Au = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

mit $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ und dem Operator

$$A := P_\Omega \Delta, \quad D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \cap L_\sigma^2(\Omega) : P_\Omega \Delta u \in L_\sigma^2(\Omega) \right\}.$$

5.20 Satz. *Der Stokesoperator $A = P_\Omega \Delta$ ist der Generator einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $L_\sigma^2(\Omega)$.*

Beweis. Für $u \in D(A)$ gilt unter Verwendung der Orthogonalität von P_Ω

$$\langle Au, u \rangle_{L^2} = \langle P_\Omega \Delta u, u \rangle_{L^2} = \langle \Delta u, P_\Omega u \rangle_{L^2} = \langle \Delta u, u \rangle_{L^2} = -\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Somit ist A dissipativ. Um die Voraussetzung des Satzes von Lumer-Phillips nachzuweisen, wendet man den Satz von Lax-Milgram im Raum $H_0^1(\Omega) \cap L_\sigma^2(\Omega)$ an. Dies erfolgt analog zu den vorherigen Abschnitten und sei deshalb dem Leser überlassen. \square

6. Störungstheorie und Anwendungen

6.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt soll der Grundgedanke der Störungstheorie am Beispiel von Generatoren von C_0 -Halbgruppen diskutiert werden. Die Idee einer „kleinen“ Störung ist bereits aus der Neumann-Reihe bekannt, welche verwendet wird, um die Invertierbarkeit einer kleinen Störung eines invertierbaren Operators zu zeigen. Störungsergebnisse gelten für dissipative Operatoren, für Erzeuger von C_0 -Halbgruppen und für Erzeuger von holomorphen Halbgruppen. Als Anwendungsbeispiele werden die Wellengleichung und ein Schrödingeroperator diskutiert.

a) Abstrakte Störungstheorie

Sei A Generator einer C_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X und $B : D(B) \rightarrow X$ ein linearer Operator. Im folgenden wollen wir uns mit dem Problem befassen, unter welchen Bedingungen an B und A die Summe $A + B$ wieder eine C_0 -Halbgruppe auf X generiert. Hierbei wird unterschieden bezüglich C_0 -Halbgruppe, C_0 -Kontraktionshalbgruppe und holomorphe C_0 -Halbgruppe. Der Kern für alle folgenden Störungsergebnisse ist jedoch die folgende Zutat:

6.2 Lemma. *Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \rightarrow X$, $B : D(B) \rightarrow X$ lineare Operatoren mit $D(A) \subset D(B)$, A abgeschlossen. Es gelte:*

(i) *Es existieren Konstanten $\varphi \in [0, \pi]$ und $M_\varphi > 0$ mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi).$$

Für $\varphi = 0$ setzen wir $\Sigma_\varphi := (0, \infty)$.

(ii) *Es existieren $\alpha \in [0, 1)$ und $b \geq 0$ mit*

$$\|Bx\| \leq \frac{\alpha}{M_\varphi + 1} \|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A)).$$

Sei $\omega > \frac{bM_\varphi}{1-\alpha}$. Dann ist für $\lambda \in \Sigma_\varphi$ mit $|\lambda| \geq \omega$ der Operator $A + B$ invertierbar, und es gilt

$$\|\lambda(\lambda - (A + B))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\varphi}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\alpha + \frac{bM_\varphi}{\omega}\right)} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, |\lambda| \geq \omega).$$

Beweis. Wir schreiben

$$\lambda - A - B = \left(1 - B(\lambda - A)^{-1}\right)(\lambda - A). \quad (6-1)$$

Der Operator $B(\lambda - A)^{-1}$ ist auf ganz X definiert, und wegen Voraussetzung (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|B(\lambda - A)^{-1}\| &\leq \frac{\alpha}{M_\varphi + 1} \underbrace{\|A(\lambda - A)^{-1}\|}_{-I + \lambda(\lambda - A)^{-1}} + b\|(\lambda - A)^{-1}\| \\ &\leq \frac{\alpha}{M_\varphi + 1}(1 + M_\varphi) + \frac{bM_\varphi}{|\lambda|} \\ &= \alpha + \frac{bM_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi). \end{aligned}$$

Für $\omega > \frac{bM_\varphi}{1-\alpha}$ und $\lambda \in \Sigma_\varphi$ mit $|\lambda| \geq \omega$ folgt $\alpha + \frac{bM_\varphi}{|\lambda|} < 1$. Für diese λ ist also $1 - B(\lambda - A)^{-1}$ und damit (6-1) invertierbar, und mit der Neumannschen Reihe folgt

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda - (A + B))^{-1} \right\| &\leq \|(\lambda - A)^{-1}\| \cdot \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (B(\lambda - A)^{-1})^k \right\| \\ &\leq \frac{M_\varphi}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\alpha + \frac{bM_\varphi}{\omega}\right)} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, |\lambda| > \omega). \end{aligned}$$

□

Als erste Konsequenz erhalten wir folgendes Störungsresultat für Generatoren von Kontraktionshalbgruppen. Die im folgenden Satz auftauchende Bedingung nennt man (für $a < 1$) die relative Beschränktheit von B bzgl. A .

6.3 Satz. Sei $A : D(A) \rightarrow X$ Generator einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf dem Banachraum X und $B : D(B) \rightarrow X$ dissipativ mit $D(A) \subset D(B)$. Falls $a \in [0, \frac{1}{2})$ und $b \geq 0$ existieren mit

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A)), \quad (6-2)$$

so ist $A + B$ Generator einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X .

Beweis. Im Beweis des Satzes von Lumer-Phillips haben wir gezeigt, dass $\operatorname{Re}\langle Ax, y \rangle \leq 0$ für alle $x \in X$ und $y \in J(x)$ gilt. Sei nun $x \in D(A)$ und $j(x) \in J(x)$ mit $\operatorname{Re}\langle Bx, j(x) \rangle \leq 0$. Dann folgt

$$\operatorname{Re}\langle (A + B)x, j(x) \rangle = \operatorname{Re}\langle Ax, j(x) \rangle + \operatorname{Re}\langle Bx, j(x) \rangle \leq 0.$$

Also ist auch $(A + B)$ ein dissipativer Operator.

Wegen $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1$ ist die Bedingung (i) von Lemma 6.2 mit $\varphi = 0$ und $M_\varphi = 1$ erfüllt. Setzt man nun $\alpha := 2a < 1$ in Lemma 6.2, so erhält man $\lambda \in \rho(A + B)$ für $\lambda > \frac{b}{1-2a}$. Aus dem Satz von Lumer und Phillips folgt die Behauptung. □

6.4 Korollar. Sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \rightarrow H$ schief-selbstadjungiert. Weiterhin sei $B : D(B) \rightarrow H$ schiefsymmetrisch mit $D(A) \subset D(B)$, und es gelte (6-2). Dann ist $A + B$ schief-selbstadjungiert. Insbesondere erzeugt $A + B$ nach dem Satz von Stone eine unitäre C_0 -Gruppe auf H .

Beweis. Nach dem Satz von Stone erzeugt A eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe. Nach Satz 6.3 erzeugt auch $A + B$ eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe, also ist $\rho(A + B) \neq \emptyset$. Wie im Beweis des Satzes von Stone kann man nun zeigen, daß $A + B$ schief-selbstadjungiert ist. \square

6.5 Satz. Sei A Generator einer C_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X und $B \in L(X)$. Dann ist $A + B$ Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe auf X .

Beweis. Wegen $A + B = (A - \omega) + (B + \omega)$ kann $(\exp(tA))_{t \geq 0}$ als beschränkt vorausgesetzt werden. Auf $(X, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sup_{t \geq 0} \|\exp(tA)x\|$ ($x \in X$) erzeugt A eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe. Weiter sei $x \in (X, \|\cdot\|)$ und $j(x) \in J(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle (B - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}I)x, j(x) \rangle &= \operatorname{Re}\langle Bx, j(x) \rangle - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}\langle x, j(x) \rangle \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|x\| \cdot \|j(x)\| - \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Demnach ist $B - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}I$ dissipativ. Außerdem gilt

$$\|(B - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}I)x\| \leq 2\|B\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|x\| \quad (x \in D(A)).$$

Somit ist die Voraussetzung von Satz 6.3 erfüllt mit $a = 0$ und $b = 2\|B\|$, und $A + B - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}I$ erzeugt eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$. Daher erzeugt $A + B - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}I$ eine beschränkte C_0 -Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$, und $A + B$ erzeugt eine C_0 -Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$. \square

Für Erzeuger von holomorphen C_0 -Halbgruppen erhalten wir

6.6 Satz. Sei A Generator einer holomorphen C_0 -Halbgruppe auf X vom Winkel $\varphi \in (0, \pi/2]$ und $B : D(B) \rightarrow X$ ein linearer Operator mit $D(A) \subset D(B)$. Es gelte

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A))$$

für ein $a \in [0, 1)$ und ein $b \geq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $A + B$ Generator einer holomorphen C_0 -Halbgruppe auf X vom Winkel φ ist, falls $a < \delta$.

Beweis. Wir wählen $\omega_1 \in \mathbb{R}$ so, dass $A_{\omega_1} := A - \omega_1$ eine beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe erzeugt. Für $\tilde{\varphi} \in (0, \varphi)$ folgt

$$\|\lambda(\lambda - A_{\omega_1})^{-1}\| \leq M_{\tilde{\varphi}} \quad (\lambda \in \Sigma_{\tilde{\varphi} + \frac{\pi}{2}}).$$

Setze $\delta := \frac{1}{M_{\tilde{\varphi}}+1}$ und $\alpha := a/\delta \in [0, 1)$. Wegen $a = \frac{\alpha}{M_{\tilde{\varphi}}+1}$ sind somit die Voraussetzungen von Lemma 6.2 erfüllt für $M_{\tilde{\varphi}}, a, \alpha, b$. Damit folgt

$$\left\| (\lambda - (A_{\omega_1} + B))^{-1} \right\| \leq \frac{CM_{\tilde{\varphi}}}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_{\tilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}, |\lambda| \geq \omega_2),$$

wobei

$$C = \left[1 - \left(\frac{a}{\delta} + \frac{bM_{\tilde{\varphi}}}{\omega_2} \right) \right]^{-1}, \quad \omega_2 > \frac{bM_{\tilde{\varphi}}}{1 - \frac{a}{\delta}}.$$

Wir wählen nun ein $\omega_3 > 0$ mit $\{\lambda - \omega_3 : \lambda \in \Sigma_{\tilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}, |\lambda| \geq \omega_2\} \supset \Sigma_{\tilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}$. Dann existiert ein $K_{\tilde{\varphi}} > 0$ mit $|\lambda| = |\mu + \omega_3| \geq K_{\tilde{\varphi}}|\mu|$ für alle $\mu \in \Sigma_{\tilde{\varphi}+\pi/2}$. Dies ergibt

$$\left\| (\mu - (A_{\omega_1} + B - \omega_3))^{-1} \right\| \leq \frac{\tilde{C}_{\tilde{\varphi}}}{|\mu + \omega_3|} \leq \frac{C_{\tilde{\varphi}}}{|\mu|} \quad (\mu \in \Sigma_{\tilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}).$$

Nach Theorem 4.22 erzeugt $A + B - \omega_1 - \omega_3$ eine beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe vom Winkel φ erzeugt, d.h. $A+B$ erzeugt eine holomorphe C_0 -Halbgruppe vom Winkel φ . \square

b) Anwendungen

6.7 Korollar (Wellengleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Operator $\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ mit Definitionsbereich $D(\tilde{A}) := D(\Delta_D) \times H_0^1(\Omega)$ erzeugt eine C_0 -Halbgruppe auf $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Insbesondere ist die Wellengleichung

$$(WG) \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ w|_{t=0} = w_0 & \text{in } \Omega, \\ w_t|_{t=0} = w_1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

wohlgestellt.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz 5.13 gilt $\tilde{A} = A + B$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.5. \square

In vielen Fällen ist das Kriterium aus den obigen Sätzen erfüllt, da der Faktor vor dem Term $\|Ax\|$ beliebig klein gewählt werden kann. Der zugehörige Begriff ist der einer Kato-Störung.

6.8 Definition. Sei X ein Banachraum und seien A, B lineare Operatoren in X . Dann heißt B *Kato-Störung* von A auf X , falls $D(A) \subset D(B)$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\|Bu\| \leq \varepsilon \|Au\| + C(\varepsilon) \|u\| \quad (u \in D(A)).$$

6.9 Satz. a) Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \ell < k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches die Kegelbedingung erfüllt, sei $1 \leq p < \infty$, und sei $A: L^p(\Omega) \supset D(A) \rightarrow L^p(\Omega)$ ein Operator mit

$$\|Au\|_{L^p(\Omega)} \geq C_A \|u\|_{W_p^k(\Omega)} \quad (u \in D(A))$$

für eine Konstante $C_A > 0$ (z.B. ein elliptischer Operator der Ordnung k). Sei $B: L^p(\Omega) \supset D(B) \rightarrow L^p(\Omega)$ ein linearer Operator mit $D(B) \supset D(A)$ und

$$\|Bu\|_{L^p(\Omega)} \leq C_B \|u\|_{W_p^\ell(\Omega)} \quad (u \in D(A))$$

(z.B. ein Differentialoperator der Ordnung ℓ). Dann ist B eine Kato-Störung von A .

b) Definiere den Operator $B: L^2(\mathbb{R}^3) \supset D(B) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ durch $u \mapsto Bu$, $Bu(x) := \frac{u(x)}{|x|}$, und $D(B) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) : Bu \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$. Dann ist B eine Kato-Störung des Laplace-Operators in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Beweis. a) Nach Voraussetzung gilt $D(B) \supset D(A)$, und für alle $u \in D(A)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Bu\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_B \|u\|_{W_p^\ell(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_p^k(\Omega)} + \tilde{C}(\varepsilon) \|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{C_A} \|Au\|_{L^p(\Omega)} + \frac{C(\varepsilon)}{C_A} \|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hier wurde die Interpolationsungleichung Satz A.7 verwendet.

b) Sei A der Laplace-Operator in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nach der dritten Poincaré-Ungleichung (Satz A.8) ist $D(B) \supset H^1(\mathbb{R}^3) \supset H^2(\mathbb{R}^3) = D(A)$ und $\|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$. Damit folgt die Behauptung aus Teil a). \square

Teil a) des obigen Satzes besagt, dass die Störungssätze 6.3, 6.5, 6.6 anwendbar sind, falls A ein Differentialoperator der Ordnung k ist und B ein Differentialoperator niedrigerer Ordnung ist.

Teil b) findet Anwendung in der Quantenmechanik. So wird das Wasserstoffatom ohne Spin quantenmechanisch beschrieben durch den Hamilton-Operator $H: L^2(\mathbb{R}^3) \supset D(H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ mit $D(H) := H^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$(Hu)(x) := -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta u)(x) - \frac{e^2}{|x|}u(x) \quad (u \in D(H)).$$

Der Term $\frac{e^2}{|x|}$ heißt auch Coulomb-Potential. Die zeitliche Entwicklung des quantenmechanischen Systems ist gegeben durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t u(t) = Hu(t) \quad (t > 0), \quad u(0) = u_0.$$

Dabei ist \hbar eine physikalische Konstante, das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum, m die Masse des Elektrons und e die Ladung des Elektrons.

6.10 Satz. a) Der Hamilton-Operator $-H$ erzeugt eine holomorphe C_0 -Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ mit Winkel $\frac{\pi}{2}$.

b) Der Schrödinger-Operator mit Coulomb-Potential $-\frac{i}{\hbar}H$ erzeugt eine unitäre C_0 -Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Beweis. Nach Beispiel 4.23 a) erzeugt der Laplace-Operator $L^2(\mathbb{R}^3)$ eine holomorphe Halbgruppe mit Winkel $\frac{\pi}{2}$. Satz 6.9 besagt, dass das Coulomb-Potential eine Kato-Störung von des Laplace-Operators ist, und die Behauptung von Teil a) folgt aus dem Störungssatz 6.6. Analog entsteht der Schrödinger-Operator mit Potential durch eine schiefsymmetrische Kato-Störung des Operators $i\Delta$ (siehe Satz 5.11), und Störungssatz 6.4 ist anwendbar. \square

7. L^p -Theorie: Parabolische Operatoren im Ganzraum

7.1 Worum geht's? Wir kennen bereits äquivalente Kriterien dafür, dass ein Operator etwa eine holomorphe Halbgruppe erzeugt. Dieses Kriterium verlangt es, die Resolvente des zugehörigen Operators genauer zu studieren, insbesondere die Resolventenabschätzung (a priori-Abschätzung) zu beweisen. Hier soll nun gezeigt werden, wie man dies für eine große Klasse von Differentialoperatoren im \mathbb{R}^n nachweisen kann. Dabei handelt es sich um parameterelliptische oder parabolische Operatoren.

Der „Königsweg“, um nichtselbstadjungierte Differentialoperatoren zu untersuchen, liegt in der Fouriertransformation. Während in L^2 der Satz von Plancherel verwendet werden kann, gibt es in L^p den Satz von Michlin, der Bedingungen an das Symbol des Operators stellt.

a) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Michlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

7.2 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \leq 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathcal{F}^{-1} \xi^\alpha \mathcal{F} u = \mathcal{F}^{-1} \frac{\xi^\alpha}{1 + |\xi|^2} \mathcal{F} f$$

als Gleichheit in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathcal{F}^{-1} m_\alpha(\xi) \mathcal{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1 + |\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathcal{F}^{-1} m_\alpha(\xi) \mathcal{F} f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Michlin.

7.3 Definition. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Eine Funktion $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt Fouriermultiplikator in L^p , falls $f \mapsto \mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} f$ einen stetigen linearen Operator $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ definiert. Genauer ist m Fouriermultiplikator, wenn für die Abbildung $\widetilde{M}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F} \varphi$ gilt $R(\widetilde{M}) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\widetilde{M}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

d.h. wenn \widetilde{M} eine eindeutige Fortsetzung $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ besitzt. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators M . Wir schreiben $\text{op}(m) := \mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F} := M$ und $\text{symb}(M) := m$.

7.4 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\text{op}(m) \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $0 \leq c_k \rightarrow \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \geq c_k$ auf A_k . Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int |m(\xi)g_k(\xi)|^2 d\xi \geq c_k^2 \lambda(A_k) = c_k^2 \|g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

d.h. $\text{op}(m)$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p -Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

7.5 Satz (Michlin). Sei $1 < p < \infty$ und $m: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen

(i) $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und

$$|\xi^{|\beta|} D^\beta m(\xi)| \leq C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1),$$

(ii) $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und

$$|\xi^\beta D^\beta m(\xi)| \leq C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta \in \{0, 1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p -Fouriermultiplikator mit

$$\|\text{op}(m)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq c(n, p)C_M,$$

wobei die Konstante $c(n, p)$ nur von n und p abhängt.

7.6 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Michlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht. Eine übliche Schreibweise ist auch Mikhlin.

b) Sei die Funktion $m: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(\rho\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \leq k$.

Denn z.B. für $\beta = (1, 0, \dots, 0)$ gilt

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi_1} m)(\rho\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(\rho\xi + he_1) - m(\rho\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \rho^d \frac{m(\xi + \frac{h}{\rho}e_1) - m(\xi)}{\rho \frac{h}{\rho}} \\ &= \rho^{d-1} \partial_{\xi_1} m(\xi). \end{aligned}$$

Für beliebige β folgt die Aussage dann iterativ.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Michlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|} D^\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil b). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \left| m_\beta\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \right| \leq \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Michlin wird die Frage aus Bemerkung 7.2 beantwortet.

7.7 Korollar. Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W_p^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 7.2 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \leq 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \leq 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \geq 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \geq 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Michlin-Bedingung. \square

b) Parameterelliptische Differentialoperatoren

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

7.8 Definition (elliptische und parabolische Differentialoperatoren). Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Der Operator $A_0(x, D) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ heißt der Hauptteil des Operators $A(x, D)$.

b) Die Abbildung $a: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ heißt das Symbol von $A(x, D)$. Wir schreiben $a = \text{symb}(A)$ bzw. $A = \text{op}(a)$. Das Symbol $a_0 := \text{symb}(A_0)$ heißt das Hauptsymbol von $A(x, D)$.

c) Der Operator A heißt elliptisch in $\bar{\Omega}$, falls

$$a_0(x, \xi) \neq 0 \quad (x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Analog definiert man elliptisch in einer Menge $M \subset \overline{\Omega}$, z.B. elliptisch an der Stelle $x \in \overline{\Omega}$.

d) Sei $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor in \mathbb{C} mit Spitze in 0. Dann heißt der Operator $A(x, D)$ parameterelliptisch im Sektor \mathcal{L} , falls

$$a_0(x, \xi) - \lambda \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega}, (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}) \setminus \{(0, 0)\}).$$

e) Der Operator $\partial_t - A(x, D)$ heißt parabolisch, falls $A(x, D) - \lambda$ parameterelliptisch im Sektor $\overline{\Sigma_{\pi/2}}$ ist.

7.9 Beispiele. a) Der Cauchy-Riemann-Operator $A := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}$ ist elliptisch in \mathbb{R}^2 .

b) Der Laplace-Operator $A := \Delta$ ist elliptisch, parameterelliptisch in jedem Sektor, der den negativen Halbstrahl $(-\infty, 0)$ nicht enthält, und insbesondere parabolisch.

c) Der Operator $A(x, D) := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} + (ix_1 - x_2)\partial_{x_3}$ ist nicht elliptisch in \mathbb{R}^3 , denn

$$a_0(x, \xi) = i\xi_1 - \xi_2 + i(ix_1 - x_2)\xi_3 = 0 \quad \text{für } \xi = (x_2, -x_1, 1).$$

Für diesen Operator existieren C^∞ -Funktionen f , für welche $Au = f$ nicht einmal in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ lösbar ist.

7.10 Definition. Sei $n \geq 2$ und $A(x, D)$ ein elliptischer Differentialoperator in Ω . Dann heißt $A(x, D)$ eigentlich elliptisch in Ω , falls das Polynom $P := A_0(x, \xi', \cdot)$ für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ genauso viele Nullstellen in der oberen komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ wie in der unteren komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$ besitzt.

7.11 Bemerkung. a) Man beachte in obiger Definition, dass P keine reelle Nullstelle besitzt, da $A(x, D)$ elliptisch ist.

b) Das Hauptsymbol eines Operators A der Ordnung m ist homogen vom Grad m in ξ . Falls A elliptisch ist, enthält $a_0(x, \xi)$ einen Term der Form $a(x)\xi_n^m$, denn sonst wäre $a_0(x, \xi) = 0$ für $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0$ und $\xi_n = 1$. Somit ist P ein Polynom vom Grad m , und falls A eigentlich elliptisch ist, ist m eine gerade Zahl.

c) Falls a_α für $|\alpha| = m$ reellwertige Koeffizienten sind und $A(x, D)$ elliptisch ist, so ist A auch eigentlich elliptisch. Denn dann ist P ein Polynom mit reellen Koeffizienten ohne reelle Nullstelle.

7.12 Satz. Sei $A(x, D)$ elliptisch in Ω und $n \geq 3$. Dann ist A eigentlich elliptisch. Insbesondere ist die Ordnung von A eine gerade Zahl.

Beweis. Sei $x \in \Omega$ und $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Wegen $n \geq 3$ existiert ein stetiger Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = \xi'$ und $\gamma(1) = -\xi'$. Sei $n_+(t)$ die Anzahl der Nullstellen z mit $\text{Im } z > 0$ des Polynoms $p_t := a_0(x, (\gamma(t), \cdot))$. Dann ist $n_+(t)$ unabhängig von t . Denn da die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängt, gäbe es sonst ein $t \in (0, 1)$, für welches p_t eine reelle Nullstelle besitzt, was wegen $\gamma(t) \neq 0$ einen Widerspruch zur Elliptizität darstellt.

Daher gilt $n_+(0) = n_+(1)$, d.h. die Polynome $a_0(x, \xi', \cdot)$ und $a_0(x, -\xi', \cdot)$ besitzen dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. Wegen

$$a_0(x, -\xi', z) = (-1)^m a_0(x, \xi', -z)$$

ist aber $n_+(1)$ auch die Anzahl der Nullstellen von $a_0(x, \xi', \cdot)$ in $\mathbb{C}_- := -\mathbb{C}_+$, d.h. A ist eigentlich elliptisch. \square

7.13 Definition. Sei $A = A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m in Ω . Dann heißt A gleichmäßig elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$|a_0(x, \xi)| \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n),$$

und gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ parameterelliptisch in einem Sektor \mathcal{L} , falls

$$|a_0(x, \xi) - \lambda| \geq C(|\xi|^{2m} + |\lambda|) \quad (x \in \overline{\Omega}, (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}) \setminus \{0\}).$$

Der Operator A heißt gleichmäßig stark elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$\text{Re } a_0(x, \xi) \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n).$$

7.14 Lemma. Sei Ω beschränkt und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Falls A elliptisch in $\overline{\Omega}$ ist, so ist A dort auch gleichmäßig elliptisch.

Beweis. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \overline{\Omega}$ gilt

$$|a_0(x, \xi)| = |\xi|^m \left| a_0\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \right| \geq M|\xi|^m,$$

wobei $M := \min\{|a_0(x, \xi)| : (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times S^{n-1}\} > 0$. Hier wurde verwendet, dass $a_0(x, \xi)$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ ihr Minimum annimmt. \square

7.15 Definition. Sei $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung $2m$ und sei $1 < p < \infty$.

a) Sei $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor und $s \in [0, 2m]$. Dann definiert man die parameterabhängigen Normen $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ durch

$$\|u\|_{s,p,\Omega} := \|u\|_{W_p^s(\Omega)} + |\lambda|^{s/(2m)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad (\lambda \in \mathcal{L}, u \in W_p^{2m}(\Omega)).$$

b) Die L^p -Realisierung A_p des Differentialoperators $A(x, D)$ ist gegeben durch $D(A_p) := W_p^m(\Omega)$ und $A_p u := A(x, D)u$ ($u \in D(A_p)$).

7.16 Satz (Modellproblem für parameterelliptische Operatoren). *Seien $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| = 2m$ und $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parameterelliptisch im $\overline{\Sigma_\varphi}$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann gilt für die L^p -Realisierung $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma_\varphi}$, und A_p ist sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_p} \geq \varphi$. Falls $\varphi > \frac{\pi}{2}$, so erzeugt A_p eine beschränkte holomorphe Halbgruppe mit Winkel $\geq \varphi - \frac{\pi}{2}$. Zu jedem $\lambda_0 > 0$ existiert ein $C_{\lambda_0} > 0$ mit*

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_{\lambda_0} \|\lambda - A_p\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathcal{L}, |\lambda| \geq \lambda_0). \quad (7-1)$$

Beweis. Setze $\lambda = q^{2m}$ mit $q \in \overline{\Sigma_{\varphi/2m}}$ und definiere für festes α mit $|\alpha| \leq 2m$ die Funktion

$$m_\alpha(\xi, q) := \frac{q^{2m-|\alpha|} \xi^\alpha}{a(\xi) - q^{2m}} \quad ((\xi, q) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma_{\varphi/2m}} \setminus \{0\}).$$

Dann ist $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma_{\varphi/2m}} \setminus \{0\})$ homogen in (ξ, q) vom Grad 0 und erfüllt nach Bemerkung 7.6 die Michlin-Bedingung bzgl. ξ . Nach dem Satz von Michlin ist $\|\text{op}(m_\alpha(\cdot, q))\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_\alpha$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $q \in \overline{\Sigma_{\varphi/2m}} \setminus \{0\}$ und $u := \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{A(\xi) - q^{2m}} \mathcal{F} f$. Dann gilt

$$q^{2m-|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\text{op}(m_\alpha(\cdot, q))f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (7-2)$$

Insbesondere ist $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) = D(A_p)$ und $(A_p - \lambda)u = f$, d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Falls andererseits $(A_p - \lambda)u_1 = (A_p - \lambda)u_2 = f$ mit $u_{1,2} \in D(A_p)$ gilt, so folgt $u_1 = \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{A(\xi) - \lambda} \mathcal{F} f = u_2$ als Gleichheit in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und damit $u_1 = u_2$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Somit ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma_\varphi} \setminus \{0\}$. Aus (7-2) folgt mit $\alpha = 0$ die Resolventenabschätzung

$$\|\lambda(\lambda - A_p)^{-1}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_0 \quad (\lambda \in \overline{\Sigma_\varphi} \setminus \{0\}).$$

Damit ist A_p sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_p} \geq \varphi$, und für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ erzeugt A_p eine beschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe mit Winkel $\geq \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Zu zeigen ist noch die Abschätzung (7-1). Sei $q_0 > 0$. Dann folgt aus (7-2) für $q \in \overline{\Sigma_{\varphi/2m}}$, $|q| \geq q_0$, die Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda| \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + |q|^{2m} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&\leq C_1 \min\{1, q_0\}^{-2m} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m} C_\alpha \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{\lambda_0} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_0 = q_0^{2m}$. □

7.17 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde die Homogenität von $m_\alpha(\xi, q)$ verwendet, wobei $q = \lambda^{1/2m}$. In diesem Fall sagt man, m_α ist quasi-homogen von (ξ, λ) ab. Im allgemeinen heißt eine Funktion $m = m(\xi, \lambda)$ quasi-homogen mit Gewicht $r \in \mathbb{R}$ in (ξ, λ) vom Grad d , falls

$$m(\rho\xi, \rho^r\lambda) = \rho^d m(\xi, \lambda) \quad ((\xi, \lambda) \neq 0, \rho > 0).$$

Die Zahl r heißt das relative Gewicht von λ bzgl. ξ . In obigem Beweis hat λ das relative Gewicht $2m$. Neben spektraltheoretischen Betrachtungen wie im obigen Beweis sind parabolische Gleichungen der Grund für das Auftreten quasihomogener Symbole. So hat bei der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t - \Delta$ die Zeitableitung im obigen Sinn relatives Gewicht 2 bzgl. den Ortsableitungen (man spricht von parabolischer Skalierung).

7.18 Korollar. Falls in der Situation von Satz 7.16 der Operator $A(D)$ parabolisch ist, so erzeugt die L^p -Realisierung A_p eine beschränkte holomorphe Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $A(D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_{\pi/2}$, d.h. es gilt $a(\xi) - \lambda \neq 0$ für alle $(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\pi/2} \setminus \{0\}$. Wegen $a(\rho\xi) = \rho^{2m}a(\xi)$ ist der Wertebereich $R(a) := \{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$ ein Kegel, und da $\{a(\xi) : |\xi| = 1\}$ kompakt ist, ist dieser Kegel abgeschlossen. Damit ist aber die Menge der Winkel $W := \{\alpha \in (-\pi, \pi) : e^{i\alpha} \notin R(a)\}$ offen. Da $A(D)$ parabolisch ist, gilt $[-\pi/2, \pi/2] \subset W$, und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon] \subset W$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\arg \lambda \in [-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon]$ folgt damit $\lambda \notin R(a)$, d.h. $a(\xi) - \lambda \neq 0$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).

Wir haben gezeigt, dass $A(D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\varepsilon}$ ist. Nach Satz 7.16 ist A_p sektoriell mit einem Winkel $\varphi > \pi/2$, und nach Satz 4.22 erzeugt A_p eine holomorphe Halbgruppe. □

7.19 Bemerkung. Wir haben in obigem Beweis gezeigt, dass die Menge aller Winkel $\alpha \in (-\pi, \pi)$ offen ist, für welche $A(D)$ die Bedingung der Parameterelliptizität auf dem Halbstrahl $\{\rho e^{i\alpha} : \rho \geq 0\}$ erfüllt.

7.20 Lemma. Sei $1 < p < \infty$ und $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ ($|\alpha| \leq m$). Dann ist $A_p \in L(W_p^m(\Omega), L^p(\Omega))$ mit

$$\|A_p\|_{L(W_p^m(\Omega), L^p(\Omega))} \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis. Das folgt sofort aus $\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ für $|\alpha| \leq m$ und aus der Tatsache, dass der Multiplikationsoperator $u \mapsto a_\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ die Norm $\|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$ besitzt. \square

7.21 Satz (Hauptsatz über parameterelliptische Operatoren). Sei $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator in \mathbb{R}^n mit Koeffizienten

$$a_\alpha \in \begin{cases} C(\mathbb{R}^n), & |\alpha| = 2m, \\ L^\infty(\mathbb{R}^n), & |\alpha| < 2m. \end{cases}$$

Ferner existiere $a_\alpha(\infty) := \lim_{|x| \rightarrow \infty} a_\alpha(x)$ für alle $|\alpha| = 2m$. Falls A parameterelliptisch in einem Sektor $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ist, so existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für die L^p -Realisierung von A die Inklusion $\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathcal{L} : |\lambda| \geq \lambda_0\}$ gilt. Ferner gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C \|(A_p - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathcal{L}, |\lambda| \geq \lambda_0).$$

Falls $\mathcal{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$, so ist $A - \lambda_0$ sektoriell mit Winkel φ ; falls $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, so erzeugt $A - \lambda_0$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(i) *Lokalisierung („Freezing the coefficients“):* Wir fixieren die Koeffizienten von A an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ und betrachten nur den Hauptteil, also den Operator $A_0(x_0, D)$. Nach Satz 7.16 ist $A_0(x_0, D) - \lambda$ invertierbar für alle $\lambda \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, und es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_1 \|(A_0(x_0, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathcal{L}, |\lambda| \geq 1).$$

Wie man im Beweis von Satz 7.16 sieht, kann die Konstante C_1 unabhängig von x_0 gewählt werden.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(\infty)| < \varepsilon \quad (|x| \geq R, |\alpha| = 2m).$$

Da $\overline{B(0, R)} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist und die Koeffizienten a_α für $|\alpha| = 2m$ stetig sind, existieren endlich viele $x_1, \dots, x_N \in \overline{B(0, R)}$ und offene Umgebungen U_i von x_i mit $\overline{B(0, R)} \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ und

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_i)| < \varepsilon \quad (x \in U_i, |\alpha| = 2m, i = 0, \dots, N) \quad (7-3)$$

Setze hierbei $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0, R)}$ und $x_0 := \infty$. Ohne Einschränkung seien dabei die U_i so gewählt, dass eine Konstante $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist in höchstens N_0 Umgebungen U_i enthalten. (Dies erreicht man etwa, indem man die Punkte x_i auf einem Gitter wählt und die U_i als Kugeln mit geeignetem Radius.)

(ii) *Beweis der a priori-Abschätzung:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{2C_1}$ in (7-3) und zugehörige Umgebungen U_i . Dann gilt für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } u \subset U_i$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\leq C_1 \|(A_0(x_i, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_1 \|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1 \|(A_0(x, D) - A_0(x_i, D))u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_1 \|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1 \cdot \frac{1}{2C_1} \|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung wurde Lemma 7.20 verwendet. Damit erhalten wir

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq 2C_1 \|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wähle nun eine zu U_i gehörige C^∞ -Partition der Eins, d.h. $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\sum_{i=0}^N \varphi_i = 1$ und $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$ ($i = 0, \dots, N$). Dann gilt für $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq \sum_{i=0}^N \|\varphi_i u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq 2C_1 \sum_{i=0}^N \|(A_0(x, D) - \lambda)\varphi_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Es ist

$$(A_0(x, D) - \lambda)\varphi_i u = \varphi_i (A_0(x, D) - \lambda)u + R_{1,i}u,$$

wobei $R_{1,i}$ ein Differentialoperator mit Ordnung nicht größer als $2m - 1$ ist.

Nach Wahl der Umgebungen U_i und wegen $0 \leq \varphi \leq 1$ gilt für $w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=0}^N \|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq N_0 \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\leq 2C_1 \sum_{i=0}^N (\|\varphi_i (A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_{1,i}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \\ &\leq C_2 (\|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \end{aligned}$$

mit $C_2 := 2N_0 C_1$ und $R_1 := \sum_{i=0}^N R_{1,i}$. Wir schreiben weiter $R_2 := A(x, D) - A_0(x, D)$ und erhalten

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_2 (\|(A(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}).$$

Da R_1, R_2 Differentialoperatoren von Ordnung nicht größer als $2m - 1$ sind, gilt $\|R_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)}$ mit einer Konstanten $C_3 > 0$. Wir verwenden nun die Interpolationsungleichung (Satz A.7) und erhalten

$$\|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4C_2 C_3} \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_4 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4C_2 C_3} \|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

falls $|\lambda| \geq \lambda_1 := 4C_2 C_3 C_4$. Eingesetzt ergibt sich

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_2 \|(A(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} \|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

d.h. die a priori-Abschätzung des Satzes gilt mit der Konstante $2C_2$ für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\lambda \in \mathcal{L}$ mit $|\lambda| \geq \lambda_1$.

(iii) *Existenz der Resolvente:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{16C_1 N_0}$ in (i) und zugehörige Umgebungen U_i . Definiere dazu die Partition der Eins $(\varphi_j)_{j=0,\dots,N}$ wie oben und $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\text{supp } \psi_j \subset U_j$ und $\psi_j = 1$ auf $\text{supp } \varphi_j$. Sei $A_{p,j}$ die L^p -Realisierung von $A_0(x_j, D)$. Wir definieren

$$R(\lambda)f := \sum_{j=0}^N \varphi_j (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathcal{L}, |\lambda| \geq \lambda_1).$$

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (A_p - \lambda)R(\lambda)f &= \sum_{j=0}^N (A_p - \lambda)\varphi_j (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \\ &= \sum_{j=0}^N (\varphi_j (A_p - \lambda)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f + T_{1,j} (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f), \end{aligned}$$

wobei $T_{1,j}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq 2m - 1$ ist. Wir schreiben weiter

$$\begin{aligned} \varphi_j (A_p - \lambda)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f &= \varphi_j (A_0(x_j, D) - \lambda)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \\ &\quad + \varphi_j (A(x, D) - A_0(x_j, D))(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \\ &= \varphi_j f + T_{2,j} f \end{aligned}$$

mit $T_{2,j} f := \varphi_j (A(x, D) - A_0(x_j, D))(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f$.

Für $v_j := (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f$ gilt nach Teil (i) des Beweises

$$\|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda| \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Andererseits gilt nach Wahl der Umgebungen U_i und unter Verwendung der Interpolationsungleichung die Abschätzung

$$\|(A(x, D) - A_0(x_j, D))v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{8C_1 N_0} \|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_5 \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

mit einer Konstanten $C_5 > 0$. Für den Operator $T_2 := \sum_{j=0}^N T_{2,j}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\|T_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{j=0}^N \|T_{2,j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{j=0}^N \|\varphi_j (A(x, D) - A_0(x_j, D)) v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{j=0}^N \|(A(x, D) - A_0(x_j, D)) v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{j=0}^N \left(\frac{1}{8C_1 N_0} C_1 \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{C_5 \cdot C_1}{|\lambda|} \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&\leq \left(\frac{1}{8} + \frac{C_5 C_1 N_0}{|\lambda|} \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

falls $|\lambda| \geq \lambda_2 := \max\{\lambda_1, 8C_5 C_1 N_0\}$. Genauso folgt aus der Interpolationsungleichung

$$\sum_{j=0}^N \|T_{1,j} (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

falls $\lambda \in \mathcal{L}$, $|\lambda| \geq \lambda_3$ mit geeignetem $\lambda_3 > 0$ ist. Wir setzen $\lambda_0 := \max\{\lambda_2, \lambda_3\}$ und erhalten insgesamt

$$(A_p - \lambda)R(\lambda)f = f + T(\lambda)f \quad (\lambda \in \mathcal{L}, |\lambda| \geq \lambda_0),$$

wobei $T(\lambda)f := T_2 f + \sum_{j=0}^N T_{1,j} (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f$ ein beschränkter Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist mit Norm $\|T(\lambda)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{1}{2}$. Somit gilt

$$(A_p - \lambda)R(\lambda)(1 + T(\lambda))^{-1} = \text{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Nach der a priori-Abschätzung aus Teil (ii) des Beweises ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. es gilt

$$\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathcal{L} : |\lambda| \geq \lambda_0\}.$$

Die a priori-Abschätzung des Satzes wurde bereits in Teil (ii) bewiesen, die restlichen Aussagen folgen wie im Modellproblem. \square

8. Energiemethoden für nichtautonome Evolutionsgleichungen

8.1 Worum geht's? Nichtautonome Evolutionsgleichungen haben die Form $\partial_t u(t) - A(t)u(t) = 0$, d.h. jetzt hängt der Operator selbst von der Zeit ab. Hier greift die Halbgruppentheorie nicht mehr. Mögliche Ansätze zur Behandlung derartiger Gleichungen sind etwa die Lokalisierung (bzgl. t), die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren (in t und x simultan) sowie Energiemethoden, auch variationelle Methoden genannt. Die Hauptidee ist es, schwache Hilbertraumwertige Lösungen zu betrachten. Ein zentraler Begriff ist der des Gelfand-Tripels. Eine ähnliche alternative Methode, derartige Gleichungen zu behandeln, ist die Theorie der CD-Systeme von Kato, welche hier aber nicht betrachtet wird.

a) Parabolische Gleichungen

8.2 Definition. a) Sei X ein Banachraum und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann wird die Menge der X -wertigen Distributionen auf Ω definiert als $\mathcal{D}'(\Omega; X) := L(\mathcal{D}(\Omega), X)$, d.h. als die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow X$, wobei $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der üblichen lokalkonvexen Topologie versehen wird.

b) Für $u \in \mathcal{D}'(\Omega; X)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definiert man die Ableitung $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega; X)$ wie üblich durch

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Eine Distribution u heißt regulär, falls ein $f_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega; X)$ existiert mit

$$u(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) f_u(x) dx \in X \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Im Folgenden wird nicht zwischen einer regulären Distribution und der zugehörigen Funktion unterschieden.

c) Für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man die X -wertigen Sobolevräume

$$W_p^k(\Omega; X) := \{u \in L^p(\Omega; X) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega; X) (|\alpha| \leq k)\}.$$

Wieder setzt man $H^k(\Omega; X) := W_2^k(\Omega; X)$.

8.3 Bemerkung. a) Sei $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow X$ linear. Nach Definition der Topologie in $\mathcal{D}'(\Omega; X)$ gilt $u \in \mathcal{D}'(\Omega; X)$ genau dann, wenn für alle Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ folgt $u(\varphi_n) \rightarrow 0$ in X .

b) Die Einbettung $L^1_{\text{loc}}(\Omega; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; X)$ ist injektiv, was aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt.

c) Sei $u \in L^2((0, T); X)$. Dann gilt $u \in H^1((0, T); X)$ genau dann, wenn ein $v \in L^2((0, T); X)$ existiert mit

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^T v(t)\varphi(t)dt \quad (\varphi \in \mathcal{D}((0, T))). \quad (8-1)$$

In diesem Fall heißt v auch die schwache Ableitung von u , und es gilt $u' = v$ als Gleichheit in $\mathcal{D}'((0, T); X)$ und in $L^2((0, T); X)$. Aufgrund der Dichtheit gilt (8-1) auch für alle $\varphi \in H_0^1((0, T))$.

8.4 Definition. Ein Gelfand-Tripel ist von der Form $V \subset H \subset V'$, wobei V und H Hilberträume mit $V \subset H$ sind und folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) V ist dicht in H (bzgl. der Topologie in H).
- (ii) Die Inklusion $i: V \rightarrow H$ ist stetig (bzgl. der Topologien in V und H).
- (iii) Die duale (adjungierte) Einbettung $i': H = H' \rightarrow V'$ ist stetig und $H \subset V'$ ist dicht.¹ Hierbei wird H' nach dem Satz von Riesz mit seinem Dualraum H' identifiziert.
- (iv) Die duale Paarung zwischen V und V' ist kompatibel mit dem Skalarprodukt in H , d.h. es gilt

$$v(u) = \langle v, u \rangle_{V' \times V} = \langle u, v \rangle_H \quad (u \in V \subset H, v \in H = H' \subset V').$$

8.5 Beispiel. Das wichtigste Beispiel ist $V = H_0^1(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $H = L^2(\Omega)$ und $V' = H^{-1}(\Omega)$. Man beachte, dass V als Hilbertraum selbst isomorph zu seinem Dualraum ist, aber bei einem Gelfand-Tripel die duale Paarung bzgl. des Skalarprodukts in H und nicht in V betrachtet wird. Statt als Dualraum kann man $H^{-1}(\Omega)$ auch als Vervollständigung von $L^2(\Omega)$ bzgl. der Norm

$$\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup \left\{ \left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H^1(\Omega)} = 1 \right\}$$

definieren (da $L^2(\Omega)$ dicht in $H^{-1}(\Omega)$ ist).

Im Folgenden seien $T > 0$ und $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit separablen reellen Hilberträumen V und H . Wie oben sei wieder C eine generische Konstante.

8.6 Satz (Ein Interpolationssatz). Falls $u \in L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V')$, so gilt (nach eventueller Änderung auf einer Nullmenge) $u \in C([0, T], H)$. Die Einbettung

$$L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V') \subset C([0, T], H)$$

ist stetig.

¹Dies folgt tatsächlich bereits aus (i) und (ii).

Beweis. Wir setzen $Z := L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V')$ mit Norm

$$\|u\|_Z := \left(\|u\|_{L^2((0, T); V)}^2 + \|u\|_{H^1((0, T); V')}^2 \right)^{1/2}.$$

Sei zunächst $u \in Z \cap C^1([0, T], H)$. Wegen $\frac{\partial}{\partial t} \|u(t)\|_H^2 = 2\langle u(t), \partial_t u(t) \rangle_H$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle $t, t_0 \in [0, T]$

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(t_0)\|_H^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle u(s), \partial_s u(s) \rangle_H ds.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein t_0 mit

$$\|u(t_0)\|_H^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds.$$

Mit diesem t_0 und der Abschätzung

$$|\langle u(s), \partial_s u(s) \rangle_H| = |\langle u(s), \partial_s u(s) \rangle_{V \times V'}| \leq \|\partial_s u(s)\|_{V'} \|u(s)\|_V \quad \text{für fast alle } s \in [0, T]$$

erhält man für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H^2 &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2 \int_0^t \|\partial_s u(s)\|_{V'} \|u(s)\|_V ds \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2 \int_0^T \|\partial_s u(s)\|_{V'} \|u(s)\|_V ds \\ &\leq \frac{1}{T} \|u\|_{L^2((0, T); H)}^2 + 2 \|u\|_{H^1((0, T); V')} \|u\|_{L^2((0, T); V)}. \end{aligned}$$

Wegen $\|u\|_{L^2((0, T); H)} \leq C \|u\|_{L^2((0, T); V)}$ gilt also für alle $u \in Z \cap C^1([0, T], H)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C([0, T], H)} \leq C \left(\|u\|_{L^2((0, T); V)}^2 + \|u\|_{H^1((0, T); V')} \|u\|_{L^2((0, T); V)} \right)^{1/2} \leq C \|u\|_Z. \quad (8-2)$$

Sei nun $u \in Z$ allgemein. Da $Z \cap C^1([0, T]; H)$ dicht in Z ist, existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Z \cap C^1([0, T]; H)$ mit $\|u_n - u\|_Z \rightarrow 0$. Nach (8-2) gilt $\|u_n - u_m\|_{C([0, T], H)} \rightarrow 0$, d.h. $(u_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in $C([0, T], H)$ und damit konvergent gegen ein Element $\tilde{u} \in C([0, T], H)$. Da $u_n \rightarrow u$ in Z , folgt $u = \tilde{u}$ fast überall. Die Stetigkeit der Einbettung $Z \subset C([0, T], H)$ folgt aus (8-2). \square

Wir betrachten nun die abstrakte Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t)u(t) &= f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (8-3)$$

Dabei ist $A: [0, T] \rightarrow L(V, V')$ eine zeitabhängige Familie von Operatoren, und $f: [0, T] \rightarrow V'$ und $u_0 \in H$ gegeben.

8.7 Definition. Die zur Operatorfamilie $(A(t))_{t \in [0, T]}$ gehörige parametrisierte Bilinearform (quadratische Form) $a: (0, T) \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ist definiert durch

$$a(t, u, v) := -\langle A(t)u, v \rangle_{V' \times V} = -(A(t)u)v \quad (t \in (0, T), u, v \in V).$$

Die Form (und die Operatorfamilie) heißt koerzitiv, falls positive Konstanten α, β existieren mit

$$a(t, u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - \beta \|u\|_H^2 \quad (t \in [0, T], u \in V). \quad (8-4)$$

Die Form und die Operatorfamilie heißen streng koerzitiv oder V -elliptisch, falls die Gleichung (8-4) mit $\beta = 0$ gilt.

8.8 Satz (A priori-Abschätzung). Sei $A \in C([0, T], L(V, V'))$ koerzitiv. Dann existiert eine Konstante $C_A > 0$ so, dass für alle $u \in Z := L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V')$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^2((0, T), V)} \leq C_A (\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2((0, T), V')}) \quad (8-5)$$

gilt, wobei $f(t) := \partial_t u(t) - A(t)u(t)$ und $u_0 := u(0)$ gesetzt wurde. Insbesondere ist die Lösung von (8-3) eindeutig und hängt stetig von den Daten ab.

Beweis. O.E. sei A streng koerzitiv, sonst betrachte $v(t) := e^{-\beta t} u(t)$, welches das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) - A(t)v(t) + \beta v(t) &= e^{-\beta t} f(t), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

erfüllt, mit zugehöriger Bilinearform $a(t, u, u) + \beta \|u\|_H^2$.

Man beachte, dass $u_0 \in H$ nach Satz 8.6 wohldefiniert ist und $f \in L^2((0, T), V')$ wegen $u \in Z$ gilt. Für $u \in Z \cap C^1([0, T], H)$ folgt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|u(t)\|_H^2 &= 2\langle \partial_t u(t), u(t) \rangle_H = 2\langle \partial_t u(t), u(t) \rangle_{V' \times V} \\ &= 2\langle A(t)u(t) + f(t), u(t) \rangle_{V' \times V} = -2a(t, u(t), u(t)) + 2\langle f(t), u(t) \rangle_{V' \times V}. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\|u(T)\|_H^2 + 2 \int_0^T a(t, u(t), u(t)) dt = \|u_0\|_H^2 + 2 \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt.$$

Wir nutzen die Koerzitivität aus, schätzen den rechten Integranden ab und erhalten

$$\|u(T)\|_H^2 + 2\alpha \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \leq \|u_0\|_H^2 + 2 \int_0^T \|f(t)\|_{V'} \|u(t)\|_V dt.$$

Auf der linken Seite lassen wir den ersten Term weg, auf der rechten Seite verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Youngsche Ungleichung $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$ (mit frei wählbarem $\varepsilon > 0$). Es ergibt sich

$$2\alpha \|u\|_{L^2((0,T);V)}^2 \leq \|u_0\|_H^2 + 2\varepsilon \|u\|_{L^2((0,T);V)}^2 + 2C_\varepsilon \|f\|_{L^2((0,T);V')}^2.$$

Wählt man ε klein genug (etwa $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$), so erhält man (8-5) für alle $u \in Z \cap C^1([0, T], H)$. Für allgemeine $u \in Z$ folgt (8-5) wieder mit einem Dichtheitsargument.

Da die Gleichung linear ist, folgt aus (8-5) die Eindeutigkeit der Lösung, da die Differenz zweier Lösungen die Gleichung mit $f = 0$ und $u_0 = 0$ erfüllt. \square

8.9 Satz. Sei $A \in C([0, T], L(V, V'))$ koerzitiv. Dann existiert zu jedem $u_0 \in H$ und $f \in L^2((0, T); V')$ genau eine Lösung $u \in L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V')$ von (8-3).

Der Beweis verwendet das sogenannte Faedo-Galerkin-Verfahren, welches eine Projektion auf endlich-dimensionale Unterräume verwendet.

Beweis. (i) Eindeutige Lösbarkeit der endlich-dimensionalen Systeme:

Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V (bzgl. der Topologie von V). Man definiert $V_n := \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und betrachtet die orthogonalen Projektionen $P_n: H \rightarrow V_n$ (orthogonal in H).

Die Funktion $u_n = \sum_{i=1}^n c_{in}(t)v_i$ sei definiert als die Lösung von

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_n(t), v_j \rangle_{V' \times V} - \langle A(t)u_n(t), v_j \rangle_{V' \times V} &= \langle f(t), v_j \rangle_{V' \times V} \quad (j = 1, \dots, n), \\ u_n(0) &= P_n u_0. \end{aligned} \quad (8-6)$$

Für die Koeffizienten $(c_{in}(t))_{i=1, \dots, n}$ erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Setzt man die obige Entwicklung von u_n ein, erhält man das System

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \partial_t c_n(t) &= \mathcal{A}(t)c_n(t) + F(t) \quad (t \in (0, T)), \\ c_n(0) &= C_0. \end{aligned} \quad (8-7)$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} c_n(t) &:= (c_{in}(t))_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n, \\ C_0 &:= (\langle P_n u_0, v_i \rangle_V)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{A}(t) &:= (\langle A(t)v_i, v_j \rangle_{V' \times V})_{i, j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathcal{M} &:= (\langle v_i, v_j \rangle_H)_{i, j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ F(t) &:= (\langle f(t), v_i \rangle_{V' \times V})_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{A} \in C([0, T], \mathbb{R}^{n \times n})$ und $F \in L^2((0, T); \mathbb{R}^n) \subset L^1((0, T); \mathbb{R}^n)$, und die Matrix \mathcal{M} ist invertierbar. Für das homogene System ist daher der Satz von Picard-Lindelöf in der globalen Version anwendbar, für das inhomogene System die Variation der Konstanten. Daher existiert eine eindeutige Lösung $c_n \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_t c_n \in L^2((0, T); \mathbb{R}^n)$ von (8-7), und somit eine eindeutige Lösung

$$u_n \in C([0, T], V) \quad \text{mit} \quad \partial_t u_n \in L^2((0, T); V)$$

von (8-6).

(ii) Gleichmäßige Abschätzung für die Lösungen und Konvergenz einer Teilfolge:

Da u_n die Lösung von (8-6) ist und $\partial_t u_n \in L^2((0, T); V)$ sowie $u_n(t) \in V_n$ gilt, erhalten wir

$$\langle \partial_t u_n(t), u_n(t) \rangle_H - \langle A(t)u_n(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V} = \langle f(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V}.$$

Nur diese schwache Formulierung der Differentialgleichung wurde im Beweis von Satz 8.8 benötigt. Es gilt also (mit derselben Konstante wie in Satz 8.8, welche somit nicht von n abhängt)

$$\|u_n\|_{L^2((0, T); V)} \leq C_A (\|f\|_{L^2((0, T); V')} + \|u_0\|_H),$$

wobei $\|P_n u_0\|_H \leq \|u_0\|_H$ verwendet wurde.

Somit ist die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2((0, T); V)$ beschränkt und besitzt daher eine schwach konvergente Teilfolge, welche wieder mit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet sei. Es sei $u_n \rightharpoonup u \in L^2((0, T); V)$.

(iii) Der schwache Grenzwert löst die ursprüngliche Gleichung:

Zu zeigen ist, dass u eine Lösung von (8-3) ist. Dazu sei $\varphi \in \mathcal{D}((0, T))$ und $v \in V_N$. Da u_n eine Lösung von (8-6) ist, folgt für $n \geq N$ und für fast alle $t \in [0, T]$

$$\varphi(t) \langle \partial_t u_n(t), v \rangle_H = \varphi(t) \langle A(t)u_n(t), v \rangle_{V' \times V} + \varphi(t) \langle f(t), v \rangle_{V' \times V}.$$

Integration bzgl. t und partielle Integration liefert

$$- \int_0^T \varphi'(t) \langle u_n(t), v \rangle_H dt = \int_0^T \varphi(t) \langle A(t)u_n(t), v \rangle_{V' \times V} dt + \int_0^T \varphi(t) \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} dt.$$

Da $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0, T); V)$ und damit auch $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0, T), H)$ sowie $Au_n \rightharpoonup Au$ in $L^2((0, T), V')$ gilt, können wir den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ betrachten und erhalten

$$- \int_0^T \varphi'(t) \langle u(t), v \rangle_H dt = \int_0^T \varphi(t) \langle A(t)u(t), v \rangle_{V' \times V} dt + \int_0^T \varphi(t) \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} dt.$$

Dies gilt für alle $v \in V_N$ mit beliebigem $N \in \mathbb{N}$. Da $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von V ist, ist $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_N$ dicht in V , und somit gilt

$$- \int_0^T \varphi'(t) u(t) dt = \int_0^T \varphi(t) A(t) u(t) dt + \int_0^T \varphi(t) f(t) dt$$

für alle $\varphi \in D((0, T))$ als Gleichheit in V' . Also gilt für die distributionelle Ableitung $\partial_t u$ die Gleichheit $\partial_t u = Au + f \in L^2((0, T); V')$. Insbesondere ist

$$u \in H^1((0, T); V') \cap L^2((0, T); V) \subset C([0, T], H).$$

Zu zeigen ist noch $u(0) = u_0$. Sei dazu $\varphi \in C^1([0, T])$ mit $\varphi(T) = 0$ und $v \in V_N$. Dann gilt wieder für $n \geq N$ mit partieller Integration

$$-\int_0^T \varphi'(t) \langle u_n(t), v \rangle_H dt + \varphi(0) \langle u_n(0), v \rangle_H = \int_0^T \varphi(t) \langle A(t)u_n(t) + f(t), v \rangle_{V' \times V} dt. \quad (8-8)$$

Für $n \geq N$ gilt wegen $v \in V_N$ und da P_n eine orthogonale Projektion und damit selbstadjungiert ist,

$$\langle u_n(0), v \rangle_H = \langle P_n u_0, v \rangle_H = \langle u_0, P_n v \rangle_H = \langle u_0, v \rangle_H.$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir daher aus (8-8)

$$-\int_0^T \varphi'(t) \langle u(t), v \rangle_H dt + \varphi(0) \langle u_0, v \rangle_H = \int_0^T \varphi(t) \langle A(t)u(t) + f(t), v \rangle_{V' \times V} dt. \quad (8-9)$$

Andererseits gilt $\partial_t u = Au + f \in L^2((0, T), V')$. Multiplikation mit φ und Anwendung auf v , Integration über $(0, T)$ und partielle Integration liefert

$$-\int_0^T \varphi'(t) \langle u(t), v \rangle_H dt + \varphi(0) \langle u(0), v \rangle_H = \int_0^T \varphi(t) \langle A(t)u(t) + f(t), v \rangle_{V' \times V} dt.$$

Der Vergleich mit (8-9) liefert $\varphi(0) \langle u_0 - u(0), v \rangle_H = 0$. Für $\varphi(0) \neq 0$ folgt $\langle u_0 - u(0), v \rangle_H = 0$ für alle $v \in V_N$. Da $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_N$ dicht in V und damit auch in H ist, folgt $u(0) = u_0 \in H$. \square

8.10 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist somit die Abbildung

$$L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V') \rightarrow L^2((0, T); V') \times H, \quad u \mapsto (\partial_t u - Au, u(0))$$

ein Isomorphismus von Hilberträumen ist, insbesondere ist die Umkehrabbildung, d.h. die Lösung der Gleichung, ebenfalls stetig. Diese Stetigkeit könnte auch mit dem Satz vom stetigen Inversen bewiesen werden, allerdings wird in obigem Beweis die a priori-Abschätzung sowohl für die Eindeutigkeit der Lösung als auch für die Existenz des schwachen Grenzwerts beim Galerkin-Ansatz benötigt.

Der Isomorphismus zeigt auch, dass die Lösung so glatt ist, wie es aufgrund der Gleichung erwartet werden kann; man verliert also keine Regularität. Dies ist typisch für parabolische Gleichung und wird auch als maximale Regularität oder optimale Regularität bezeichnet.

8.11 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet, und sei $A = A(x, t)$ ein Differentialoperator der Form

$$A(x, t)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} (a_{ij}(x, t) \partial_{x_i} u) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \partial_{x_i} u + c(x, t)u.$$

Dabei seien die Koeffizienten reellwertig und stetig in x und t , und die Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ sei strikt positiv definit, d.h. es gelte

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq q |\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, t \in [0, T]).$$

Dann sind die Bedingungen von Satz 8.9 erfüllt, wobei $V := H_0^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ und damit $V' = H^{-1}(\Omega)$ gewählt wird. Somit besitzt das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) - A(x, t)u(x, t) &= f(x, t) & (x \in \Omega, t \in [0, T]), \\ u(x, t) &= 0 & (x \in \partial\Omega, t \in [0, T]), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (x \in \Omega) \end{aligned}$$

für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2((0, T), H^{-1}(\Omega))$ eine eindeutige Lösung

$$u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap H^1((0, T); H^{-1}(\Omega)).$$

Man spricht hier auch von einer schwachen Lösung.

Wir werden im Folgenden eine Aussage für höhere Regularität der Lösung zeigen. Dafür betrachtet man den Operator $A(t)$ als unbeschränkten Operator in H :

8.12 Definition. Sei $A \in L(V, V')$. Dann ist die H -Realisierung A_H als unbeschränkter Operator in H definiert durch $D(A_H) := \{u \in V : Au \in H\} \subset H$ und $A_H u := Au$ ($u \in D(A_H)$). Falls $A: [0, T] \rightarrow L(V, V')$ eine Operatorfamilie ist, erhält man die Familie $(A_H(t))_{t \in [0, T]}$ unbeschränkter Operatoren.

8.13 Satz (Höhere Regularität). Sei $A \in C^1([0, T], L(V, V'))$ koerzitiv, und seien $u_0 \in D(A_H(0))$ und

$$f \in Z := L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V').$$

Dann gilt für die (nach Satz 8.9 existierende und eindeutige) Lösung u von (8-3) die höhere Regularität

$$\begin{aligned} u &\in H^1((0, T); V) \cap H^2((0, T); V') \subset C^1([0, T], H), \\ Au &\in L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V') \subset C([0, T], H). \end{aligned}$$

Beweis. Wieder sei o.E. A koerzitiv mit Konstante $\beta = 0$ in (8-4). Formales Differenzieren der Gleichung (8-3) liefert

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(t) - A(t)\partial_t u(t) - (\partial_t A)(t)u(t) &= \partial_t f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ \partial_t u(0) &= A(0)u_0 + f(0).\end{aligned}$$

Nach Satz 8.6 ist $f \in C([0, T], H)$ und damit $f(0) \in H$, nach Voraussetzung gilt $u_0 \in D(A_H(0))$ und damit $A(0)u_0 \in H$ sowie $t \mapsto (\partial_t A(t))u(t) + \partial_t f(t) \in L^2((0, T); V')$. (Man beachte, dass $u \in L^2((0, T); V)$ und $\partial_t A \in C([0, T], L(V, V'))$ gilt.) Somit existiert nach Satz 8.9 eine eindeutige Lösung $v \in Z$ von

$$\begin{aligned}\partial_t v(t) - A(t)v(t) &= (\partial_t A(t))u(t) + (\partial_t f)(t) \quad (t \in (0, T)), \\ v(0) &= A(0)u_0 + f(0).\end{aligned}\tag{8-10}$$

Wir zeigen nun $\partial_t u = v$. Dazu sei

$$z(t) := u_0 + \int_0^t v(s)ds \quad (t \in [0, T]).$$

Dann gilt $z \in H^1((0, T); V)$ mit $\partial_t z = v$ und für alle $t \in [0, T]$ als Gleichheit in V'

$$\begin{aligned}A(t)z(t) &= A(t)u_0 + \int_0^t A(t)v(s)ds \\ &= A(t)u_0 + \int_0^t A(s)v(s)ds + \int_0^t (A(t) - A(s))v(s)ds.\end{aligned}$$

Da v (8-10) löst, gilt für fast alle $s \in [0, T]$ die Gleichheit $A(s)v(s) = \partial_s v(s) - (\partial_s A(s))u(s) - \partial_s f(s)$ und damit

$$\begin{aligned}A(t)z(t) &= A(t)u_0 + v(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t (\partial_s A(s))u(s)ds \\ &\quad + \int_0^t (A(t) - A(s))v(s)ds.\end{aligned}$$

Mit $v(s) = \partial_s z(s)$ und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}A(t)z(t) &= A(t)u_0 + \partial_t z(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t (\partial_s A)(s)u(s)ds \\ &\quad + \int_0^t (\partial_s A(s))z(s)ds - (A(t) - A(0))z(0) \\ &= \partial_t z(t) - f(t) + \int_0^t (\partial_s A(s))(z(s) - u(s))ds,\end{aligned}$$

wobei $v(0) = A(0)u_0 + f(0)$ verwendet wurde. Für die Differenz $w := z - u \in Z$ erhält man also die Gleichung

$$\partial_t w - A(t)w = - \int_0^t (\partial_s A)(s)w(s)ds \quad (t \in (0, T)),$$

$$w(0) = 0$$

als Gleichheit in V' für fast alle t . Wendet man dies auf $w(t) \in V$ an, so erhält man für fast alle t

$$\frac{1}{2} \partial_t (\|w(t)\|_H^2) - \langle A(t)w(t), w(t) \rangle_{V' \times V} = \int_0^t \langle \partial_s A(s)w(s), w(t) \rangle_{V' \times V} ds.$$

Integriert man über $t \in [0, \tau]$ mit $\tau \in [0, T]$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \|w(\tau)\|_H^2 = - \int_0^\tau a(t, w(t), w(t)) + \int_0^\tau \int_0^t \langle (\partial_s A)(s)w(s), w(t) \rangle_{V' \times V} ds dt. \quad (8-11)$$

Für $C_1 := \max_{t \in [0, T]} \|\partial_t A(t)\|_{L(V, V')}$ gilt

$$\left| \int_0^\tau \int_0^t \langle (\partial_s A)(s)w(s), w(t) \rangle_{V' \times V} ds dt \right| \leq C_1 \int_0^\tau \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(t)\|_V ds dt.$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\int_0^t \|w(s)\|_V ds = \int_0^t \chi_{[0, t]}(s) \|w(s)\|_V ds \leq \sqrt{t} \|w\|_{L^2((0, t); V)} \leq \sqrt{t} \|w\|_{L^2((0, \tau); V)}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(t)\|_V ds dt &\leq \|w\|_{L^2((0, \tau); V)} \int_0^\tau \|w(t)\|_V \sqrt{t} dt \\ &\leq \|w\|_{L^2((0, \tau); V)}^2 \left(\int_0^\tau t dt \right)^{1/2} = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \|w\|_{L^2((0, \tau); V)}^2. \end{aligned}$$

Da A koerzitiv mit $\beta = 0$ ist, gilt andererseits

$$\int_0^\tau a(t, w(t), w(t)) dt \geq \alpha \|w\|_{L^2((0, \tau); V)}^2.$$

In (8-11) eingesetzt erhält man für alle $\tau \in [0, T]$

$$\frac{1}{2} \|w(\tau)\|_H^2 \leq \left(\frac{C_1 \tau}{\sqrt{2}} - \alpha \right) \|w\|_{L^2((0, \tau); V)}^2.$$

Für $\tau \in [0, \tau_0]$ mit $\tau_0 := \frac{\sqrt{2}\alpha}{C_1}$ ist die rechte Seite nichtpositiv, und es folgt $w(\tau) = 0$. Eine Wiederholung dieses Arguments in den Intervallen $[\tau_0, 2\tau_0]$, $[2\tau_0, 3\tau_0]$, ... liefert schließlich $w = 0$ und damit $0 = \partial_t w = \partial_t z - \partial_t u = v - \partial_t u$, d.h. es gilt $\partial_t u = v$.

Wegen $v \in Z$ folgt damit $\partial_t u \in Z$ und wegen $Au = \partial_t u - f$ auch $Au \in Z$. Nach dem Einbettungssatz gilt $Z \subset C([0, T], H)$ und damit $u \in C^1([0, T], H)$ sowie $Au \in C([0, T], H)$. \square

b) Hyperbolische Gleichungen

Nun wollen wir hyperbolische Gleichungen betrachten. Hier ist die Lösbarkeit mit der Selbstadjungiertheit der Operatoren $A_H(t)$ verknüpft. Wieder sei $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit reellen separablen Hilberträumen V, H, V' und $T \in (0, \infty)$.

8.14 Lemma. *Sei $A \in L(V, V')$ streng koerzitiv. Dann ist $A: V \rightarrow V'$ ein Isomorphismus, und die H -Realisierung $A_H: H \supset D(A_H) \rightarrow H$ ist ein dicht definierter und abgeschlossener Operator mit $0 \in \rho(A_H)$.*

Beweis. Für die zugehörige Bilinearform $a(u, v) := -\langle Au, v \rangle_{V' \times V}$ gilt nach Voraussetzung die Abschätzung $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$ ($u \in V$) mit $\alpha > 0$. Wegen $A \in L(V, V')$ ist $|a(u, v)| \leq \|A\| \|u\|_V \|v\|_{V'}$, d.h. $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine streng koerzitive und stetige Bilinearform. Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert zu jedem $f \in V'$ genau ein $u \in V$ mit

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad (v \in V).$$

Also ist $A: V \rightarrow V'$ bijektiv und stetig, und nach dem Satz vom stetigen Inversen ist auch A^{-1} stetig, d.h. A ist ein Isomorphismus.

Nach Definition gilt $D(A_H) = A^{-1}(H)$. Da A ein Isomorphismus ist, gilt

$$\overline{A^{-1}(H)}^V = A^{-1}(\overline{H}^{V'}) = A^{-1}(V') = V \stackrel{d}{\subset} H,$$

also ist $D(A_H) \stackrel{d}{\subset} V \stackrel{d}{\subset} H$, und damit ist A_H dicht definiert.

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A_H)$ mit $u_n \rightarrow u$ in H und $A_H u_n \rightarrow v$ in H . Dann gilt auch $A_H u_n \rightarrow v$ in V' , und mit der Stetigkeit von A^{-1} erhalten wir für $u_0 := A^{-1}v$

$$u_n = A^{-1}(A_H u_n) \rightarrow A^{-1}v = u_0 \text{ in } V.$$

Damit gilt auch $u_n \rightarrow u_0$ in H und somit $u = u_0 \in D(A_H)$ und $A_H u = Au = Au_0 = v$. Also ist A_H abgeschlossen.

Da $A: V \rightarrow V'$ ein Isomorphismus ist, existiert zu jedem $f \in H$ genau ein $u \in V$ mit $Au = f$. Nach Definition von A_H gilt $u \in D(A_H)$. Also ist $A_H: D(A_H) \rightarrow H$ bijektiv, und da A_H abgeschlossen ist, gilt $A_H^{-1} \in L(H)$ und damit $0 \in \rho(A_H)$. \square

8.15 Lemma. *Sei $A: [0, T] \rightarrow L(V, V')$ eine koerzitive Operatorfamilie, und $a: [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a(t, u, v) = \langle A(t)u, v \rangle_{V' \times V}$ die zugehörige Bilinearform. Für jedes $t \in [0, T]$ sind äquivalent:*

(i) Die Bilinearform $a(t, \cdot, \cdot)$ ist symmetrisch, d.h. es gilt

$$a(t, u, v) = a(t, v, u) \quad (u, v \in V).$$

(ii) Der Operator $A_H(t): H \supset D(A_H(t)) \rightarrow H$ ist selbstadjungiert.

Falls dies für alle $t \in [0, T]$ gilt, so heißt die Bilinearform a (und die Familie A) symmetrisch.

Beweis. Sei $t \in [0, T]$ fest. O.E. sei A streng koerzitiv, sonst betrachte $A(t) - \beta$ mit zugehöriger Bilinearform $a(t, u, v) + \beta \langle u, v \rangle_H$. Nach Lemma 8.14 ist $A(t): V \rightarrow V'$ ein Isomorphismus, und $A_H(t)$ ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit $0 \in \rho(A_H(t))$.

(i) \Rightarrow (ii): Sei $a(t, \cdot, \cdot)$ symmetrisch. Für $u, v \in D(A_H(t))$ gilt dann

$$\langle A(t)u, v \rangle_H = \langle A(t)u, v \rangle_{V' \times V} = -a(t, u, v) = -a(t, v, u) = \langle A(t)v, u \rangle = \langle u, A(t)v \rangle.$$

Damit ist $A_H(t)$ ein symmetrischer Operator mit $\rho(A_H(t)) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ und damit selbstadjungiert.

(ii) \Rightarrow (i): Falls $A_H(t)$ selbstadjungiert ist, gilt für alle $u, v \in D(A_H(t))$ die Gleichheit $a(t, u, v) = a(t, v, u)$. Da $D(A_H(t)) = A(t)^{-1}(H) \subset V$ dicht ist und die Bilinearform stetig ist, gilt diese Gleichheit für alle $u, v \in V$, d.h. $a(t, \cdot, \cdot)$ ist symmetrisch. \square

Die zu $(A(t))_{t \in [0, T]}$ gehörige hyperbolische Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) - A(t)u(t) &= f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ u(0) &= u_0, \\ \partial_t u(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{8-12}$$

Dabei ist die erste Zeile als Gleichheit in V' für fast alle $t \in (0, T)$ zu verstehen. Als Lösungsraum werden wir

$$\mathbb{E} := \{u \in L^2((0, T); V) \mid \partial_t u \in L^2((0, T); H), \partial_t^2 u \in L^2((0, T); V')\}$$

betrachten.

8.16 Bemerkung. Es gilt

$$\mathbb{E} = L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); H) \cap H^2((0, T); V'),$$

wie sich sofort aus der stetigen Einbettung $V \subset H$ und damit $L^2((0, T); V) \subset L^2((0, T); H)$ ergibt. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt damit auch

$$\mathbb{E} \subset C([0, T], H) \cap C^1([0, T], V').$$

Wir betrachten zunächst die Eindeutigkeit der Lösung. Im Beweis werden wir das Lemma von Gronwall verwenden, das in einfachster Form besagt: Aus der Abschätzung $y(t) \leq b + c \int_0^t y(s) ds$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ folgt $y(t) \leq be^{ct}$.

8.17 Satz. Sei $A \in C^1([0, T], L(V, V'))$ koerzitiv und symmetrisch. Falls $u \in \mathbb{E}$ eine Lösung von (8-12) mit $f = 0$, $u_0 = u_1 = 0$ ist, so gilt $u(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$.

Beweis. Sei $s \in (0, T)$ fest. Definiere

$$v(t) := \int_s^t u(\tau) d\tau \quad (t \in [0, s]).$$

Dann gilt $v \in H^1((0, s); V) \subset C([0, s], V)$ mit $\partial_t v = u$ und $v(s) = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\partial_t^2 u(t) - A(t)u(t) = 0 \in V'$ für fast alle $t \in [0, s]$, und mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s \langle \partial_t^2 u(t) - A(t)u(t), v(t) \rangle_{V' \times V} dt \\ &= - \int_0^s \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle_{V' \times V} + \int_0^s a(t, u(t), v(t)) dt \end{aligned}$$

(man beachte, dass $\partial_t u \in C([0, T], V')$ mit $\partial_t u(0) = 0 \in V'$ und $v \in C([0, T], V)$ mit $v(s) = 0$ gilt). Setze

$$a_t(t, u, v) := - \langle (\partial_t A)(t)u, v \rangle_{V' \times V} \quad (u, v \in V).$$

Dann gilt unter Verwendung der Symmetrie von a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a(t, v(t), v(t))) &= a_t(t, v(t), v(t)) + 2a(t, \partial_t v(t), v(t)) \\ &= a_t(t, v(t), v(t)) + 2a(t, u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{d}{dt} [a(t, v(t), v(t)) - \|u(t)\|_H^2] dt - \int_0^s a_t(t, v(t), v(t)) dt \\ = 2 \int_0^s [a(t, u(t), v(t)) - \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle_{V' \times V}] dt = 0. \end{aligned}$$

Wegen $v(s) = 0$ und damit $a(s, v(s), v(s)) = 0$ und $u(0) = 0$ erhalten wir

$$\|u(s)\|_H^2 + a(0, v(0), v(0)) = - \int_0^s a_t(t, v(t), v(t)) dt. \quad (8-13)$$

Da a_t stetig ist, gilt

$$\left| \int_0^s a_t(t, v(t), v(t)) dt \right| \leq C \int_0^s \|v(t)\|_V^2 dt.$$

Aus der Koerzivität von a erhält man aus (8-13)

$$\|u(s)\|_H^2 + \alpha \|v(0)\|_V^2 \leq \beta \|v(0)\|_H^2 + C \int_0^s \|v(t)\|_V^2 dt.$$

Setze $w(t) := v(t) - v(0)$. Dann gilt $w(s) = -v(0)$ und $v(t) = w(t) - w(s)$. Eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} \|u(s)\|_H^2 + \|w(s)\|_V^2 &\leq C_1 \left(\|w(s)\|_H^2 + \int_0^s \|w(t) - w(s)\|_V^2 dt \right) \\ &\leq C_1 \|w(s)\|_H^2 + 2C_1 s \|w(s)\|_V^2 + 2C_1 \int_0^s \|w(t)\|_V^2 dt. \end{aligned}$$

Mit Cauchy-Schwarz gilt

$$\|w(s)\|_H^2 = \|v(0)\|_H^2 = \left\| \int_0^s u(t) dt \right\|_H^2 \leq s \int_0^s \|u(t)\|_H^2 dt$$

und damit

$$\|u(s)\|_H^2 + (1 - 2C_1 s) \|w(s)\|_V^2 \leq C_2 \int_0^s (\|u(t)\|_H^2 + \|w(t)\|_V^2) dt.$$

Betrachtet man nun s mit $2C_1 s \leq \frac{1}{2}$, so folgt aus dem Lemma von Gronwall $u(s) = 0$, $w(s) = 0$ ($s \in [0, \frac{1}{4C_1}]$). Dieselbe Argumentation liefert nun $u = 0$ in $[\frac{1}{4C_1}, \frac{2}{4C_1}]$ etc. Also gilt $u = 0$. \square

8.18 Satz (Lösbarkeitssatz für hyperbolische Gleichungen). Sei $A \in C^1([0, T], L(V, V'))$ koerzitiv und symmetrisch. Dann existiert zu jedem $f \in L^2((0, T); H)$, $u_0 \in V$ und $u_1 \in H$ genau eine Lösung $u \in \mathbb{E}$ von (8-12). Die Abbildung

$$\begin{aligned} (f, u_0, u_1) &\mapsto (u, \partial_t u), \\ L^2((0, T); H) \times V \times H &\rightarrow L^2((0, T); V) \times L^2((0, T); H) \end{aligned}$$

ist stetig.

8.19 Bemerkung. a) Für eine Lösung $u \in \mathbb{E}$ folgt $f = \partial_t^2 u - Au \in L^2((0, T); V')$. Im Satz wird aber die höhere Regularität $f \in L^2((0, T); H)$ verlangt. Insbesondere besagt der Satz nicht, dass die Abbildung $u \mapsto (f, u_0, u_1)$, $\mathbb{E} \rightarrow L^2((0, T); H) \times V \times H$ ein Isomorphismus von Hilberträumen ist. Hier liegt also keine maximale Regularität vor.

Beweis von Satz 8.18. Die Eindeutigkeit der Lösung wurde schon in Satz 8.17 gezeigt. Für die Existenz verwendet man dasselbe Schema wie im parabolischen Fall:

(i) Galerkin-Approximation:

Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V , sei $V_n := \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, und seien $P_n: H \rightarrow V_n$ die orthogonale Projektion in H auf V_n und $\tilde{P}_n: V \rightarrow V_n$ die

orthogonale Projektion in V auf V_n . Wir definieren $u_n = \sum_{i=1}^n c_{in}(t)v_i$ als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \langle \partial_t^2 u_n(t), v_j \rangle_{V' \times V} - \langle A(t)u_n(t), v_j \rangle_{V' \times V} &= \langle f(t), v_j \rangle_{V' \times V} \quad (j = 1, \dots, n), \\ u_n(0) &= \tilde{P}_n(u_0), \\ \partial_t u_n(0) &= P_n(u_1). \end{aligned} \quad (8-14)$$

Man erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Koeffizienten c_{in} mit eindeutiger Lösung $c_n(t) = (c_{in}(t))_{i=1, \dots, n}$. Für die zugehörigen eindeutigen Lösungen u_n von (8-14) gilt $u_n \in C^1([0, T], V) \cap H^2((0, T); V)$.

(ii) Energieabschätzung für die Lösungen der endlich-dimensionalen Systeme:

Wegen $u_n \in C^1([0, T], V)$ mit $\partial_t u_n(t) \in V_n$ können wir in (8-14) v_j durch $\partial_t u_n(t)$ ersetzen und erhalten

$$\langle \partial_t^2 u_n(t), \partial_t u_n(t) \rangle_H - \langle A(t)u_n(t), \partial_t u_n(t) \rangle_{V' \times V} = \langle f(t), \partial_t u_n(t) \rangle_{V' \times V}. \quad (8-15)$$

Mit $\partial_t \|\partial_t u_n(t)\|_H^2 = 2\langle \partial_t^2 u_n(t), \partial_t u_n(t) \rangle_H$ und

$$\partial_t a(t, u_n(t), u_n(t)) = a_t(t, u_n(t), u_n(t)) + 2a(t, u_n(t), \partial_t u_n(t))$$

erhält man aus (8-15)

$$\begin{aligned} &\|\partial_t u_n(t)\|_H^2 - \|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + a(t, u_n(t), u_n(t)) - a(0, u_n(0), u_n(0)) \\ &= \int_0^t \left(2\langle \partial_s^2 u_n(s), \partial_s u_n(s) \rangle_H + a_s(s, u_n(s), u_n(s)) + 2a(s, u_n(s), \partial_s u_n(s)) \right) ds \\ &= \int_0^t \left(a_s(s, u_n(s), u_n(s)) + 2\langle f(s), \partial_s u_n(s) \rangle_H \right) ds. \end{aligned}$$

Aus der Koerzivität von a und der Stetigkeit von a und a_t folgt

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_n(t)\|_H^2 + \alpha \|u_n(t)\|_V^2 &\leq \|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + \beta \|u_n(t)\|_H^2 + C_1 \|u_n(0)\|_V^2 \\ &\quad + C_1 \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 ds + 2 \int_0^t \|f(s)\|_H \|\partial_s u_n(s)\|_H ds. \end{aligned}$$

Wegen

$$\|u_n(t)\|_H^2 \leq \left(\|u_n(0)\|_H + \int_0^t \|\partial_s u_n(s)\|_H ds \right)^2 \leq C \left(\|u_n(0)\|_V^2 + \int_0^t \|\partial_s u_n(s)\|_H^2 ds \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_n(t)\|_H^2 + \|u_n(t)\|_V^2 &\leq C_2 \left[\|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + \|u_n(0)\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_H^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(\|\partial_s u_n(s)\|_H^2 + \|u_n(s)\|_V^2 \right) ds \right]. \end{aligned}$$

Wir wenden das Gronwall-Lemma an und erhalten

$$\|\partial_t u_n(t)\|_H^2 + \|u_n(t)\|_V^2 \leq C \left(\|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + \|u_n(0)\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_H^2 ds \right).$$

Mit $\|\partial_t u_n(0)\|_H \leq \|u_1\|_H$, $\|u_n(0)\|_V \leq \|u_0\|_V$ und $f \in L^2((0, T); H)$ erhält man

$$\|u_n\|_{L^2((0, T); V)} + \|\partial_t u_n\|_{L^2((0, T); H)} \leq C \left(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|f\|_{L^2((0, T); H)} \right).$$

(iii) Schwache Konvergenz der approximativen Lösungen:

Nach (ii) sind die Folgen $(u_n)_n \subset L^2((0, T); V)$ und $(\partial_t u_n)_n \subset L^2((0, T); H)$ beschränkt. Somit existiert eine Teilfolge (o.E. wieder mit $(u_n)_n$ bezeichnet) mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ in } L^2((0, T); V) \text{ (und damit in } L^2((0, T); H)), \\ \partial_t u_n &\rightharpoonup z \text{ in } L^2((0, T); H). \end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}((0, T))$ und $v \in V_N$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi'(t) \langle u(t), v \rangle_H dt &= \langle u, \varphi'(\cdot)v \rangle_{L^2((0, T); H)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \varphi'(\cdot)v \rangle_{L^2((0, T); H)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, \varphi(\cdot)v \rangle_{L^2((0, T); H)} \\ &= - \langle z, \varphi(\cdot)v \rangle_{L^2((0, T); H)} = - \int_0^T \varphi(t) \langle z(t), v \rangle_H dt. \end{aligned}$$

Also ist $\partial_t u = z$ und damit $u \in L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); H)$ sowie $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1((0, T); H)$.

(iv) Der schwache Grenzwert ist eine Lösung der Gleichung:

Die Abbildung $\gamma_0: H^1((0, T); H) \rightarrow H$, $u \mapsto u(0)$ ist stetig und damit nach Bemerkung 8.19 b) schwach stetig. Also gilt $u_n(0) \rightharpoonup u(0)$ in H . Andererseits gilt $u_n(0) = \tilde{P}_n u_0 \rightarrow u_0$ in V und damit $u_n(0) \rightarrow u_0$ in H und insbesondere $u_n(0) \rightarrow u_0$ in H . Mit der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts (Lemma B.4 b)) folgt $u(0) = u_0$. Die Gleichheit $\partial_t u(0) = u_1$ zeigt man wie im parabolischen Fall.

Wiederum für $\varphi \in \mathcal{D}((0, T))$ und $v \in V_N$ folgt aus (8-14) mit partieller Integration

$$- \int_0^T (\varphi'(t) \langle \partial_t u_n(t), v \rangle_H + \varphi(t) \langle A(t)u_n(t), v \rangle_{V' \times V}) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle f(t), v \rangle_H dt.$$

Aus $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0, T); V)$ und $A \in C([0, T], L(V, V'))$ folgt nach Lemma B.7 $Au_n \rightharpoonup Au$ in $L^2((0, T); V')$. Damit erhalten wir für $n \rightarrow \infty$

$$- \int_0^T (\varphi'(t) \langle \partial_t u(t), v \rangle_H + \varphi(t) \langle A(t)u(t), v \rangle_{V' \times V}) dt = \int_0^T \varphi(t) \langle f(t), v \rangle_H dt.$$

Damit gilt $\partial_t^2 u = Au + f \in L^2((0, T); V')$, d.h. u ist eine Lösung von (8-12). \square

8.20 Satz (Höhere Regularität). Für $j \in \mathbb{N}_0$ sei g_j iterativ definiert durch

$$\begin{aligned} g_0 &:= u_0, \\ g_1 &:= u_1, \\ g_{j+2} &:= \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} (\partial_t^\ell A)(0) g_{j-\ell} + (\partial_t^j f)(0) \quad (j \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Sei $A \in C^1([0, T], L(V, V'))$ koerzitiv und symmetrisch. Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $f \in H^k((0, T); H)$, $\partial_t^j A \in C([0, T], L(V, H))$ für $j = 1, \dots, k+1$ sowie die Kompatibilitätsbedingungen

$$g_0, g_1, \dots, g_k \in V, \quad g_{k+1} \in H.$$

Dann gilt für die (nach Satz 8.18 existierende und eindeutige) Lösung u von (8-12) die höhere Regularität

$$u \in H^k((0, T); V) \cap H^{k+1}((0, T); H) \cap H^{k+2}((0, T); V').$$

Beweis. Für $k = 0$ ist dies genau die Aussage von Satz 8.18. Für $k > 0$ kann man den Satz mit Induktion über k beweisen, wobei wir hier nur den Schritt von $k = 0$ auf $k = 1$ ausführen, der allgemeine Schritt geht analog.

Seien also $f \in H^1((0, T); H)$, $u_0, u_1 \in V$, $g_2 = A(0)u_0 + f(0) \in H$ sowie $\partial_t A \in C([0, T], L(V, H))$. Formales Differenzieren der Gleichung (8-12) liefert

$$\begin{aligned} \partial_t^3 u(t) - A(t)\partial_t u(t) &= (\partial_t A)(t)u(t) + \partial_t f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ \partial_t u(0) &= u_1, \\ \partial_t^2 u(0) &= A(0)u_0 + f(0). \end{aligned}$$

Wegen $u \in L^2((0, T); V)$, $\partial_t A \in C([0, T], L(V, H))$, $u_1 \in V$ sowie $A(0)u_0 + f(0) \in H$ sind die rechten Seiten dieses Anfangswertproblems so glatt wie in Satz 8.18 vorausgesetzt. Damit besitzt das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v(t) - A(t)v(t) &= (\partial_t A)(t)u(t) + \partial_t f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ v(0) &= u_1, \\ \partial_t v(0) &= A(0)u_0 + f(0) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $v \in \mathbb{E}$. Um zu zeigen, dass $\partial_t u = v$ gilt, definieren wir

$$z(t) := u_0 + \int_0^t v(s) ds \quad (t \in [0, T]).$$

Dann gilt $\partial_t z = v$ sowie $z \in H^3((0, T); V') \subset C^2([0, T], V')$, und wegen $\partial_t v \in H^1((0, T); V')$ erhalten wir

$$\partial_t^2 z(t) = \partial_t v(t) = \partial_t v(0) + \int_0^t (\partial_s^2 v)(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= A(0)u_0 + f(0) + \int_0^t (A(s)v(s) + (\partial_s A)(s)u(s) + (\partial_s f)(s)) ds \\
&= A(0)u_0 + f(t) + \int_0^t (A(s)v(s) + (\partial_s A)(s)u(s)) ds
\end{aligned}$$

als Gleichheit in V' für fast alle $t \in [0, T]$. Partielle Integration liefert wegen $\partial_s(A(s)z(s)) = (\partial_s A)(s)z(s) + A(s)v(s)$ die Gleichheit

$$\partial_t^2 z(t) = A(t)z(t) + f(t) + \int_0^t (\partial_s A)(u(s) - z(s)) ds \quad (t \in (0, T)).$$

Somit erfüllt die Funktion $w := z - u \in \mathbb{E}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 w(t) - A(t)w(t) &= - \int_0^t (\partial_s A)(s)w(s) ds \quad (t \in (0, T)), \\
w(0) &= 0, \\
\partial_t w(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Wir betrachten diese Gleichung im Intervall $t \in (0, \tau)$ mit festem $\tau \in (0, T]$. Die rechte Seite ist in $L^2((0, \tau); H)$, und die Stetigkeitsaussage von Satz 8.18 liefert

$$\|w\|_{L^2((0, \tau); V)}^2 \leq C \int_0^\tau \left\| \int_0^t (\partial_s A)(s)w(s) ds \right\|_H^2 dt \leq C \int_0^\tau \|w\|_{L^2((0, t); H)}^2 dt.$$

Hier wurden Cauchy-Schwarz in $L^2((0, t); H)$ sowie $\partial_s a \in L^2((0, \tau); L(V, H))$ benutzt. Für die Funktion $F(\tau) := \|w\|_{L^2((0, \tau); H)}^2$ gilt also die Abschätzung

$$F(\tau) \leq C \int_0^\tau F(t) dt \quad (\tau \in (0, T)),$$

und mit dem Lemma von Gronwall folgt $F = 0$, d.h. $w(t) = 0$ ($t \in [0, T]$). Also gilt $z = u$ und damit $\partial_t u = v \in \mathbb{E}$, was die höhere Regularität von u beweist. \square

8.21 Bemerkung. a) Aus der angegebenen Regularität von u folgen unter Verwendung der Gleichung weitere Regularitäten. Z.B. erhält man für $k = 1$ wegen $u \in H^2((0, T); H)$ die Aussage $Au = \partial_t^2 u - f \in L^2((0, T); H)$. Falls etwa $A(t) = A_0$ unabhängig von t ist, heißt dies $u \in L^2((0, T); D_H(A_0))$.

b) Die Bedingung $\partial_t^j A \in C([0, T], L(V, H))$ ist sehr stark und durch die fehlende maximale Regularität bedingt. Falls A unabhängig von t ist, ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt. Im Beweis sieht man, dass die folgende Bedingung ausreicht: Für alle $\ell \in 0, \dots, k-1$ ist $(\partial_t^{k-\ell} A)(\partial_t^\ell u) \in L^2((0, T); H)$. Da u auch eine höhere Regularität im Sinne von a) besitzt, ist auch eine Abschwächung der Bedingungen $\partial_t^j A \in C([0, T], L(V, H))$ möglich (z.B. falls $D_H(A(t))$ unabhängig von t ist).

c) Es ist kaum möglich, eine explizite Formel für g_j anzugeben. Für die Lösung u gilt nach dem Satz

$$u \in H^k((0, T); V) \cap H^{k+1}((0, T); H) \subset C^{k-1}([0, T], V) \cap C^k([0, T], H).$$

Unter Verwendung der Gleichung sieht man, dass $g_j = (\partial_t^j u)(0)$ gilt, und die Kompatibilitätsbedingungen besagen, dass die (aufgrund der Glattheit existierenden) Grenzwerte von u und von den rechten Seiten gleich sind, d.h.

$$g_j = (\partial_t^j u)(0) \in V \quad (j = 0, \dots, k-1), \quad g_k = (\partial_t^k u)(0) \in H.$$

c) Nichtlineare Gleichungen

Im Folgenden sei X ein reflexiver Banachraum und X' sein topologischer Dualraum. Unter einem Operator $A: X \rightarrow X'$ ist ab sofort nicht notwendigerweise eine lineare Abbildung gemeint. Man schreibt üblicherweise auch für nichtlineare Operatoren $Au := A(u)$.

8.22 Definition. Sei $A: X \rightarrow X', u \mapsto Au$ ein Operator.

a) A heißt monoton, falls

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{X' \times X} \geq 0 \quad (u, v \in X).$$

Falls sogar „ $>$ “ gilt, so heißt A strikt monoton. Der Operator A heißt stark monoton, falls ein $c > 0$ existiert mit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{X' \times X} \geq c \|u - v\|_X^2 \quad (u, v \in X).$$

b) A heißt koerzitiv, falls

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_{X' \times X}}{\|u\|_X} = \infty.$$

c) A heißt beschränkt, falls beschränkte Mengen in X auf beschränkte Mengen in X' abgebildet werden.

d) A heißt hemistetig, falls für alle $u, v, w \in X$ die Abbildung

$$s \mapsto \langle A(u + sv), w \rangle_{X' \times X}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist.

8.23 Satz. Sei $A: X \rightarrow X'$ ein Operator.

a) Falls A stark monoton ist, so ist A koerzitiv.

b) Sei A monoton und hemistetig. Dann gilt:

(i) A ist maximal monoton, d.h. falls für $u \in X$ und $b \in X'$ die Ungleichung $\langle b - Av, u - v \rangle_{X' \times X} \geq 0$ ($v \in X$) gilt, so folgt $Au = b$.

(ii) Sei $(u_n)_n \subset X$ eine Folge mit $u_n \rightarrow u$ in X und $Au_n \rightarrow b$ in X' sowie $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle_{X' \times X} \leq \langle b, u \rangle_{X' \times X}$. Dann gilt $Au = b$.

Beweis. a) Es gilt $\langle Au, u \rangle_{X' \times X} = \langle Au - A(0), u \rangle_{X' \times X} + \langle A(0), u \rangle_{X' \times X} \geq c\|u\|_X^2 - \|A(0)\|_{X'}\|u\|_X$ und damit

$$\frac{\langle Au, u \rangle_{X' \times X}}{\|u\|_X} \geq c\|u\|_X - \|A(0)\|_{X'} \rightarrow \infty \quad (\|u\|_X \rightarrow \infty).$$

b) Sei A monoton und hemistetig, und seien u, b wie in (i) gegeben. Für festes $w \in X$ setzt man $v := u - sw$ ($s > 0$) und erhält

$$0 \leq \langle b - Av, u - v \rangle_{X' \times X} = s\langle b - A(u - sw), w \rangle_{X' \times X}.$$

Für $s \searrow 0$ folgt unter Verwendung der Hemistetigkeit $\langle b - Au, w \rangle_{X' \times X} \geq 0$. Ersetzt man w durch $-w$, erhält man analog $\langle b - Au, w \rangle_{X' \times X} \leq 0$. Somit gilt $Au = b$ in X' , d.h. A ist maximal monoton.

Sei nun $(u_n)_n \subset X$ eine Folge wie in (ii). Dann gilt für alle $v \in X$

$$\langle Au_n, u_n \rangle_{X' \times X} - \langle Av, u_n \rangle_{X' \times X} - \langle Au_n - Av, v \rangle_{X' \times X} = \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle_{X' \times X} \geq 0.$$

Man nimmt von dieser Gleichung den $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ und erhält

$$\langle b, u \rangle_{X' \times X} - \langle Av, u \rangle_{X' \times X} - \langle b - Av, v \rangle_{X' \times X} \geq 0$$

und damit $\langle b - Av, u - v \rangle_{X' \times X} \geq 0$ ($v \in X$). Nach (i) gilt $Au = b$. \square

Im Folgenden sei wieder $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit reellen separablen Hilberträumen V, H . Gegeben sei jetzt eine Familie $(A(t, \cdot))_{t \in [0, T]}$ von nicht notwendigerweise linearen Abbildungen $A(t, \cdot): V \rightarrow V'$. Wir betrachten die parabolische nichtlineare Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t, u(t)) &= f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{8-16}$$

Wieder werden wir die erste Gleichung dabei als Gleichheit in V' für fast alle $t \in (0, T)$ auffassen.

Zur Operatorfamilie $(A(t, \cdot))_{t \in [0, T]}$ betrachtet man den Operator

$$A: L^2((0, T); V) \rightarrow L^2((0, T); V'), \quad u \mapsto A(\cdot, u(\cdot)).$$

8.24 Satz. *Gegeben sei eine Familie nichtlinearer Operatoren $(A(t, \cdot))_{t \in [0, T]}$. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

(i) *Beschränktheit: Es existiert ein $\gamma \in L^2((0, T))$ mit*

$$\|A(t, v)\|_{V'} \leq C(\gamma(t) + \|v\|_V) \quad (t \in (0, T), v \in V).$$

- (ii) *Hemistetigkeit*: Die Abbildung $[0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto \langle A(t, u + sv), w \rangle_{V' \times V}$ ist stetig für alle $u, v, w \in V$.
- (iii) *Koerzitivität*: Es gibt $\alpha, \beta > 0$ so, dass für alle $t \in [0, T]$ und alle $u \in V$ $-\langle A(t, u), u \rangle_{V' \times V} \geq \alpha \|u\|_V^2 - \beta \|u\|_H^2$ gilt.
- (iv) *Monotonie*: Für alle $t \in [0, T]$ ist der Operator $-A(t, \cdot): V \rightarrow V'$ monoton.

Dann existiert zu jedem $f \in L^2((0, T); V')$ und zu jedem $u_0 \in H$ genau eine Lösung $u \in L^2((0, T); V) \cap H^1((0, T); V')$ von (8-16).

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass der Operator $-\mathcal{A}: L^2((0, T); V) \rightarrow L^2((0, T); V')$ beschränkt, hemistetig und monoton ist. Für $u, v \in L^2((0, T); V)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle A(t, u(t)), v(t) \rangle_{V' \times V} dt &\leq C \int_0^T (\gamma(t) + \|u(t)\|_V) \|v(t)\|_V dt \\ &\leq C (\|\gamma\|_{L^2((0, T))} + \|u\|_{L^2((0, T); V)}) \|v\|_{L^2((0, T); V)}, \end{aligned}$$

also ist \mathcal{A} beschränkt. Die Hemistetigkeit ergibt sich analog mit majorisierter Konvergenz aus der Hemistetigkeit von $A(t, \cdot)$. Die Positivität von $-\mathcal{A}$ folgt sofort aus

$$-\int_0^T \langle A(t, u(t)) - A(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle_{V' \times V} dt \geq 0 \quad (u, v \in L^2((0, T); V)).$$

(ii) Galerkin-Approximation:

Sei $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V , $V_n := \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und $P_n: H \rightarrow V_n$ die orthogonale Projektion in H auf V_n . Sei ferner $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, T], V')$ eine Folge mit $f_n \rightarrow f$ in $L^2((0, T); V')$. Wir betrachten die Differentialgleichung in V_n

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_n, v_j \rangle_{V' \times V} - \langle A(t, u_n(t)), v_j \rangle_{V' \times V} &= \langle f_n(t), v_j \rangle_{V' \times V} \quad (t \in (0, T)), \\ u_n(0) &= P_n u_0. \end{aligned} \quad (8-17)$$

Für $u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) v_i$, $c_n(t) := (c_{in}(t))_{i=1, \dots, n}$ erhält man folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \partial_t c_n(t) - \mathcal{G}(t, c_n(t)) &= F_n(t) \quad (t \in (0, T)), \\ c_n(0) &= C_0 \end{aligned} \quad (8-18)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= (\langle v_i, v_j \rangle_H)_{i, j=1, \dots, n}, \\ \mathcal{G}(t, c_n(t)) &:= (\langle A(t, \sum_{i=1}^n c_{in}(t) v_i), v_j \rangle_{V' \times V})_{i, j=1, \dots, n}, \\ F_n(t) &:= (\langle f_n(t), v_i \rangle_{V' \times V})_{i=1, \dots, n}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{G}: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, ebenso $F_n: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Matrix $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch und positiv definit. Nach dem Satz von Peano (Satz C.2) existiert eine maximale Lösung $c_n \in C^1([0, t_n], \mathbb{R}^n)$ mit $t_n > 0$. Für die zugehörige Funktion u_n gilt $u_n \in C^1([0, t_n], V_n) \subset C^1([0, t_n], V)$.

(iii) Energieabschätzung und schwache Konvergenz:

Setzt man in (8-17) punktweise $u_n(t) \in V_n$ statt v_j ein, erhält man

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u_n(t)\|_H^2 - \langle A(t, u_n(t)), u_n(t) \rangle_{V' \times V} = \langle f_n(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V} \quad (t \in (0, t_n)). \quad (8-19)$$

Unter Verwendung der Koerzivität erhält man

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u_n(t)\|_H^2 + \alpha \|u_n(t)\|_V^2 \leq \beta \|u_n(t)\|_H^2 + \langle f_n(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V} \quad (t \in (0, t_n)).$$

Wie im Beweis von Satz 8.8 folgt daraus für alle $\tau \in (0, t_n)$

$$\|u_n(\tau)\|_H^2 + \int_0^\tau \|u_n(t)\|_V^2 dt \leq C \left(\|u_0\|_H^2 + \|f_n\|_{L^2((0, T); V')}^2 \right). \quad (8-20)$$

Die rechte Seite hängt nicht von τ ab. Da \mathcal{M} positiv definit ist, gilt

$$|c_n(\tau)|^2 \leq C c_n(\tau)^\top \mathcal{M} c_n(\tau) = C \sum_{i,j=1}^n c_{in}(\tau) c_{jn}(\tau) \langle v_i, v_j \rangle_H = C \|u_n(\tau)\|_H^2.$$

Also ist $|c_n(\tau)|$ durch eine von τ unabhängige Größe beschränkt. Nach Satz C.3 folgt $t_n > T$ und damit $u_n \in C^1([0, T], V)$.

Wegen (8-20) sind $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2((0, T); V)$ und $(u_n(T))_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ beschränkt. Da nach Voraussetzung \mathcal{A} ein beschränkter Operator ist, ist auch $(\mathcal{A}u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2((0, T); V')$ beschränkt. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt also

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ in } L^2((0, T); V), \\ u_n(T) &\rightharpoonup u_1 \text{ in } H, \\ \mathcal{A}u_n &\rightharpoonup w \text{ in } L^2((0, T); V'). \end{aligned}$$

(iv) Der schwache Grenzwert ist eine Lösung der Gleichung:

Analog zum Beweis von Satz 8.9, Teil (iii), betrachtet man $\varphi \in \mathcal{D}((0, T))$ und $v \in V_N$ und erhält für $n \geq N$

$$- \int_0^T \varphi'(t) \langle u_n(t), v \rangle_{V' \times V} dt - \int_0^T \varphi(t) \langle A(t, u_n(t)), v \rangle_{V' \times V} dt = \int_0^T \langle f_n(t), v \rangle_{V' \times V} dt.$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man aufgrund der obigen schwachen Konvergenzen und der Konvergenz $f_n \rightarrow f$ in $L^2((0, T); V')$

$$- \int_0^T \varphi'(t) \langle u(t), v \rangle_{V' \times V} dt - \int_0^T \varphi(t) \langle w(t), v \rangle_{V' \times V} dt = \int_0^T \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} dt.$$

Dies zeigt $\partial_t u = w + f \in L^2((0, T); V')$ sowie $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1((0, T); V')$ und damit $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ in H . Genauso wie im Beweis von Satz 8.9 sieht man $u(0) = u_0$.

Zu zeigen ist noch $w = \mathcal{A}u$. Integriert man (8-19) über $(0, T)$, so erhält man

$$-\int_0^T \langle A(t, u_n(t)), u_n(t) \rangle_{V' \times V} dt = \frac{1}{2} \|u_n(0)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_n(T)\|_H^2 + \int_0^T \langle f_n(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V} dt.$$

Es gilt $u_n(0) \rightarrow u(0)$ in H , $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ in H und damit $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(T)\| \geq \|u(T)\|$ (siehe Lemma B.4 c)). Mit Lemma B.4 d) folgt

$$\int_0^T \langle f_n(t), u_n(t) \rangle_{V' \times V} dt \rightarrow \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(-\int_0^T \langle A(t, u_n(t)), u_n(t) \rangle_{V' \times V} dt \right) \\ \leq \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt \\ = -\int_0^T \langle w(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt. \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit wegen $w = \partial_t u - f$. Der Operator $-\mathcal{A}$ ist nach (i) monoton und hemistetig, und die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 8.23 b) (i). Nach diesem Satz gilt $\mathcal{A}u = w$, d.h. u ist eine Lösung der Gleichung.

(v) Eindeutigkeit: Seien u_1, u_2 Lösungen von (8-16). Dann folgt

$$\partial_t \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 = \langle A(t, u_1(t)) - A(t, u_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle_{V' \times V} \leq 0 \quad (t \in (0, T))$$

sowie $u_1(0) = u_2(0)$ und damit $u_1 = u_2$. \square

A. Elemente der Sobolevraumtheorie

A.1 Worum geht's? In diesem Anhang sollen einige Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume zitiert werden. Dabei wird nicht in jedem Fall Wert darauf gelegt, die Differenzierbarkeitsbedingungen an das Gebiet minimal zu wählen.

Im folgenden sei $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zu $m \in \mathbb{N}$ ist $C^m(\overline{\Omega})$ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, welche eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^m(U)$ mit einer offenen Teilmenge $U \supset \overline{\Omega}$ besitzen. Die Konstanten C, C_1, C_2 in den folgenden Aussagen sind wieder generische Konstanten.

Zunächst zitieren wir noch eine Variante der Hölderschen Ungleichung.

A.2 Satz (Hölder-Ungleichung). Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Dann ist für $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ das Produkt $fg \in L^r(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

A.3 Definition. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist der Sobolevraum $W_p^m(\Omega)$ definiert als die Menge aller $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ ($|\alpha| \leq m$). Die Norm auf $W_p^m(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \|u\|_{W_p^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Man definiert auch noch die Seminorm

$$|u|_{m,p,\Omega} := |u|_{W_p^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Im Fall $p = \infty$ modifiziert man wie üblich.

Man beachte, dass $\|\cdot\|_{0,p,\Omega} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

A.4 Satz. a) Der Sobolevraum $W_p^m(\Omega)$ ist ein Banachraum.

b) Sei $H_p^m(\Omega)$ die Vervollständigung von $\{u \in C^m(\overline{\Omega}) : \|u\|_{m,p,\Omega} < \infty\}$. Dann gilt $H_p^m(\Omega) = W_p^m(\Omega)$.

c) Falls $\partial\Omega$ die Segmentbedingung erfüllt, so ist die Menge $\{u|_\Omega : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ dicht in $W_p^m(\Omega)$.

A.5 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz). a) Falls Ω der Kegelbedingung genügt, so gilt für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ mit $mp > n$ und $j \in \mathbb{N}_0$ die Einbettung

$$W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega),$$

d.h. jedes $u \in W_p^{m+j}(\Omega)$ ist nach Änderung auf einer Nullmenge eine Funktion in $C_b^j(\Omega)$, und die Abbildung $u \mapsto u$, $W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$ ist stetig.

b) Falls Ω die starke lokale Lipschitzbedingung erfüllt, so kann in a) $C_b^j(\Omega)$ durch $C^j(\overline{\Omega})$ ersetzt werden, und es gilt sogar $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\Omega)$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ mit $\lambda \leq m - \frac{n}{p}$.

A.6 Satz (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung). Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet, und seien $m \in \mathbb{N}$ und $p, p_1 \in (1, \infty)$ gegeben mit

$$0 < \tau := \frac{n}{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \right) < 1.$$

Dann gilt $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L_{p_1}(\Omega)$ und

$$\|u\|_{0,p_1,\Omega} \leq C \|u\|_{m,p,\Omega}^\tau \|u\|_{0,p,\Omega}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(\Omega)).$$

A.7 Satz (Interpolations-Ungleichung). Sei $1 \leq p < \infty$, sei Ω ein Gebiet, welches die Kegelbedingung erfüllt, und seien $m, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < m$. Dann gilt mit $\tau := \frac{k}{m}$ die Abschätzung

$$|u|_{k,p,\Omega} \leq C \|u\|_{m,p,\Omega}^\tau \|u\|_{0,p,\Omega}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(\Omega)).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\begin{aligned} |u|_{k,p,\Omega} &\leq \varepsilon |u|_{m,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}, \\ \|u\|_{k,p,\Omega} &\leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega} \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. [1], Theorem 5.2. □

A.8 Satz (Dritte Poincaré-Ungleichung). Für $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ gilt $(x \mapsto \frac{u(x)}{|x|}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$\left\| \left(x \mapsto \frac{u(x)}{|x|} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Beweis. Siehe z.B. [6], Lemma 3.16. □

B. Anmerkungen zur schwachen Konvergenz

B.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden einige Aussagen über schwache Konvergenz in Banachräumen wiederholt und zusammengefasst.

Im Folgenden sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für $x \in X$ und $\varphi \in X'$ schreibt man $\langle \varphi, x \rangle_{X' \times X} := \varphi(x)$.

B.2 Definition. a) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt schwach konvergent gegen $x \in X$, falls $\langle \varphi, x_n \rangle_{X' \times X} \rightarrow \langle \varphi, x \rangle_{X' \times X}$ ($\varphi \in X'$) gilt. Man schreibt $x_n \rightharpoonup x$.

b) Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ heißt schwach-*konvergent gegen $\varphi \in X'$, falls für alle $x \in X$ gilt: $\langle \varphi_n, x \rangle_{X' \times X} \rightarrow \langle \varphi, x \rangle_{X' \times X}$. Man schreibt $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$.

B.3 Bemerkung. Aus Normkonvergenz folgt schwache Konvergenz in X , aus schwacher Konvergenz folgt schwach-*Konvergenz in X' . In endlich-dimensionalen Räumen stimmen die Normtopologie und die schwache Topologie überein, und eine Folge konvergiert genau dann in der Norm, wenn sie schwach konvergiert.

B.4 Lemma. a) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X , so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ beschränkt.

b) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $x_n \rightharpoonup y$ in X , so gilt $x = y$.

c) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X , so gilt $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

d) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in X' , so gilt $\langle \varphi_n, x_n \rangle_{X' \times X} \rightarrow \langle \varphi, x \rangle_{X' \times X}$.

e) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ in X' , so gilt $\langle \varphi_n, x_n \rangle_{X' \times X} \rightarrow \langle \varphi, x \rangle_{X' \times X}$.

Beweis. Siehe z.B. [8], Abschnitt 15.2. □

B.5 Satz. Sei X reflexiv. Dann ist die Menge $\overline{B(0,1)} := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ schwach folgenkompakt. Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge ist, dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in X$ mit $x_{n_k} \rightharpoonup x$ ($k \rightarrow \infty$).

Beweis. Siehe [8], Satz 15.26. □

B.6 Lemma. Sei X reflexiv und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Falls alle schwach konvergenten Teilfolgen von $(x_n)_n$ schwach gegen denselben Grenzwert x konvergieren, so konvergiert die gesamte Folge $(x_n)_n$ schwach gegen x .

Beweis. Falls x_n nicht schwach gegen x konvergiert, dann existiert ein $\varphi \in X'$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $|\langle \varphi, x_{n_k} - x \rangle_{X' \times X}| \geq \varepsilon$ ($k \in \mathbb{N}$). Nach Satz B.5 besitzt aber $(x_{n_k})_k$ wieder eine schwach konvergente Teilfolge, welche nach Voraussetzung schwach gegen x konvergiert, im Widerspruch zur obigen Ungleichung. \square

B.7 Lemma. *Seien X und Y Banachräume und $F \in L(X, Y)$. Dann ist F auch schwach stetig, d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt auch $Fx_n \rightharpoonup Fx$ in Y .*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Stetigkeit des adjungierten Operators $F' \in L(X', Y')$, da damit für alle $\varphi \in Y'$ wegen $F'\varphi \in X'$ gilt:

$$\langle \varphi, Fx_n - Fx \rangle_{Y' \times Y} = \langle \varphi \circ F, x_n - x \rangle_{X' \times X} = \langle F'\varphi, x_n - x \rangle_{X' \times X} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

\square

C. Sätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

C.1 Worum geht's? Hier wird der in der Vorlesung verwendete Satz von Peano formuliert sowie eine Aussage über das maximale Existenzintervall formuliert.

Der Beweis der folgenden beiden Sätze findet sich z.B. in [14].

C.2 Satz (Existenzsatz von Peano). Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Funktion $x \in C^1(J_\delta)$ mit $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ so, dass $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in J_\delta$ gilt und x in J_δ die Differentialgleichung

$$\partial_t x(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3-1)$$

löst.

Dies ist eine Aussage über die lokale Lösbarkeit. Jede Lösung lässt sich zu einer maximalen Lösung fortsetzen. Dabei heißt eine Lösung $x: J_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (3-1) maximal, falls für jede Lösung $\tilde{x}: J_{\tilde{x}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (3-1) mit $J_x \subset J_{\tilde{x}}$ und $\tilde{x}|_{J_x} = x$ bereits folgt $J_{\tilde{x}} = J_x$.

C.3 Satz. In der Situation von Satz C.2 sei $x: J_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung von (3-1). Dann ist $J_x = (t_-, t_+)$ ein Intervall, wobei für t_+ eine der folgenden Alternativen gilt:

- (i) $t_+ = \infty$, d.h. x ist eine globale Lösung nach rechts,
- (ii) $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0$,
- (iii) $t_+ < \infty$, $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$, $\lim_{t \rightarrow t_+} |x(t)| = \infty$.

Der letzte Satz besagt insbesondere für den Fall $G = (t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, dass jede lokale Lösung entweder global existiert oder in endlicher Zeit einen blow-up besitzt, d.h. es gilt $|x(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow t_+$.

Literatur

- [1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces*. 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.
- [2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I*. Birkhäuser, Basel etc., 1995.
- [3] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III*. Birkhäuser, Basel etc., 2001.
- [4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*. Birkhäuser, Basel etc., 2001.
- [5] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups*. Academic Press London etc., 1980.
- [6] Denk, R.: Skript zur Vorlesung Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Wintersemester 2011/12, Universität Konstanz.
- [7] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.
- [8] Denk, R., Racke, R.: *Kompendium der Analysis, Band 2*. Springer Spektrum, Wiesbaden 2012.
- [9] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer, New York etc., 2000.
- [10] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I*. Birkhäuser, Basel etc., 1990.
- [11] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators, I-IV*. Springer-Verlag Berlin 1976.
- [12] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [13] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, New York etc., 1992.
- [14] Prüss, J., Wilke, M.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Birkhäuser, Basel etc., 2010.
- [15] Renardy, M., Rogers, R.C.: *An introduction to partial differential equations*. Text Appl. Math. **13**. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [16] Růžička, M.: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin etc., 2004.

- [17] Tanabe, H.: *Equations of evolution*. Pitman, London etc., 1979.
- [18] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag Stuttgart 1982.

Index

- a priori-Abschätzung, 83
- abgeschlossener Operator, 6
- abschließbar, 30
- Anfangswertaufgabe, 13

- Banachraum-wertige Distributionen, 80
- beschränkte imaginäre Potenzen, 45
- beschränkter Operator, 99
- Bilinearform, 83
- blow-up, 108
- Bochner-Integral, 9

- Cauchy-Integralformel, 35
- Cauchy-Problem, 3
- Cauchy-Riemann-Operator, 72
- Coulomb-Potential, 68

- differenzierbar, 11, 34
- differenzierbare Halbgruppe, 45
- Dirichlet-Randbedingungen, 56
- dissipativ, 30
- Distributionen, 5
- divergenzfrei, 61
- duale Paarung, 81
- Dunford-Kalkül, 38, 41

- eigentlich elliptisch, 72
- elliptisch, 71
- erweiterter Dunford-Kalkül, 45
- Erzeuger, 14
- Existenzsatz von Peano, 108
- exponentiell stabil, 17

- Faedo-Galerkin-Verfahren, 84
- Fouriermultiplikator, 69

- Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung, 105
- Galerkin-Verfahren, 84
- Gaußkern, 15
- Gelfand-Tripel, 81
- Generator, 14
- gleichmäßig elliptisch, 73

- Gruppe, 27

- H -Realisierung, 87
- H^∞ -Kalkül, 45
- höhere Regularität, 87, 96
- Hölder-Ungleichung, 104
- Halbgruppe, 13
- Hauptsymbol, 71
- Hauptteil, 71
- Helmholtz-Zerlegung, 62
- hemistetig, 99
- holomorph, 34
- holomorphe Halbgruppe, 35
- homogen, 70
- homogener Sobolevraum, 61

- inhomogenes Cauchy-Problem, 51
- integrierbare Stufenfunktion, 8
- Interpolations-Ungleichung, 105
- Interpolationssatz, 81

- Kato-Störung, 67
- klassische Lösung, 51
- koerzitiv, 83, 99
- Kompatibilitätsbedingungen, 96
- Kontraktionshalbgruppe, 17

- Laplaceoperator, 7, 49
- Laplacetransformation, 22
- linearer Operator, 6
- Lizorkin-Bedingung, 70
- Lotka-Volterra Räuber-Beute-Modell, 1

- maximal monoton, 99
- maximale Lösung, 108
- milde Lösung, 52
- Millennium-Probleme, 2
- Modellproblem, 74
- monotoner Operator, 99
- Multiplikationsoperator, 70

- Navier-Stokes-Gleichung, 2

- Neumann-Randbedingungen, 58
- nichtlineare Gleichung, 100
- parabolisch, 72
- parameterelliptisch, 72
- Poincaré-Ungleichung, 105
- Populationsgleichung, 1
- quasi-homogen, 75
- reguläre Distribution, 80
- Resolventengleichung, 29
- Resolventenmenge, 7
- Riesz-Projektion, 36
- Satz vom abgeschlossenen Graphen, 7
- Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, 7
- Satz von der majorisierten Konvergenz, 9
- Satz von der stetigen Inversen, 7
- Satz von Hörmander, 58
- Satz von Hahn-Banach, 7
- Satz von Hille-Yosida, 21, 27, 28
- Satz von Lumer-Phillips, 31
- Satz von Michlin, 70
- Satz von Stone, 56
- schief-selbstadjungiert, 55
- Schrödingergleichung, 2, 25, 58
- Schrödingeroperator, 25, 49, 58
- schwach folgenkompakt, 106
- schwach konvergent, 106
- schwach stetig, 107
- schwach-*-konvergent, 106
- schwache Lösung, 87
- schwache Operatortopologie, 6
- Schwartz-Raum, 5
- sektoriell, 40
- separabel, 8
- Sobolevraum, 80, 104
- Sobolevscher Einbettungssatz, 104
- spektrale Winkel, 40
- Spektrum, 7
- Störungstheorie, 63
- stark elliptisch, 73
- stark messbar, 9
- stark stetige Halbgruppe, 13
- starke Operatortopologie, 6
- Stokesgleichung, 60
- streng koerzitiv, 83
- Stufenfunktion, 8
- Subdifferential, 30
- Symbol, 71
- symmetrisch, 90
- Testfunktionen, 5
- Translationshalbgruppe, 14
- Umnormierungslemma, 28
- unitär, 55
- V-elliptisch, 83
- Variation der Konstanten, 20
- Variation der Konstanten-Formel, 51
- Wärmeleitungsgleichung, 1, 56
- Wachstumsschranke, 17
- Wasserstoffatom ohne Spin, 67
- Wellengleichung, 2, 59
- wohlgestellt, 18
- Yosida-Approximation, 23