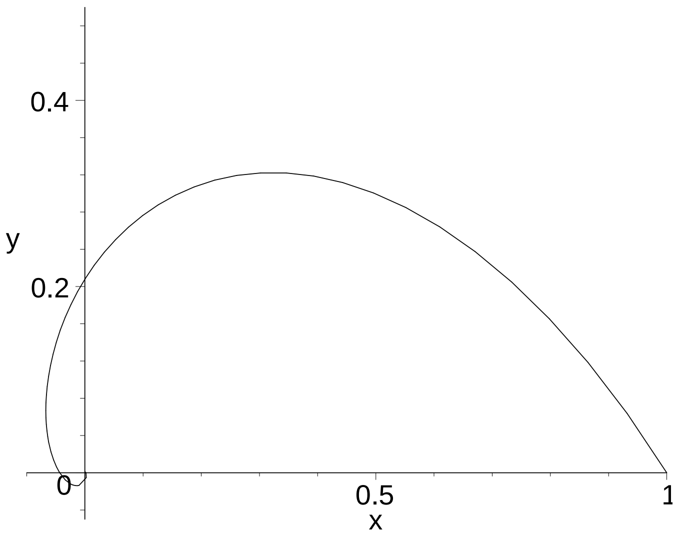
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Tilman Irmscher

7. Juli 2005

Analysis II
Lösungen zu den Stern-Aufgaben

Aufgabe 8.1*

a)



b) Es gilt $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$ und damit

$$|\gamma'(t)| = e^{-t}\sqrt{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{2}e^{-t}.$$

Der Tangenteneinheitsvektor ist also gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor ist horizontal, wenn seine zweite Komponenten verschwindet, d.h. für $\cos t = \sin t$, also für $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) $L(\Gamma) = \int_0^\infty |\gamma'(t)|dt = \sqrt{2}\big(-e^{-t}\big)\Big|_0^\infty = \sqrt{2}$. Genauso ist

$$L(\gamma|_{[0,2\pi]}) = \sqrt{2}\big(-e^{-t}\big)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\big(1 - e^{-2\pi}\big).$$

Damit wird $\frac{\sqrt{2}(1-e^{-2\pi})}{\sqrt{2}} = 99.81\%$ des Weges bereits in der ersten Umdrehung zurückgelegt.

Aufgabe 9.1*

(i) δ_x ist Inhalt: Zu zeigen ist, dass $\delta_x(A \dot{\cup} B) = \delta_x(A) + \delta_x(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt. Falls $x \notin A \dot{\cup} B$, so sind beide Seiten 0. Sei nun $x \in A \dot{\cup} B$, o.E. sei $x \in A$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist $x \notin B$, d.h. $\delta_x(A \dot{\cup} B) = \delta_x(A) = 1$ und $\delta_x(B) = 0$.

(ii) δ_x ist σ-additiv: Sei $A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A, A_n \in \mathcal{R}$ und $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$. Falls $x \notin A$, so folgt $x \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt

$$\delta_x(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n).$$

Falls $x \in A$, so existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n_0}$, und genau ein Summand in der Summe besitzt den Wert 1. Also gilt

$$\delta_x(A) = 1 = \delta_x(A_{n_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n).$$

Aufgabe 10.1*

Dies zeigt man durch direkte Rechnung: Es ist

$$\frac{1}{2}|\gamma'(b)|^2 - \frac{1}{2}|\gamma'(a)|^2 = \int_a^b \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}|\gamma'(t)|^2)dt = \int_a^b \langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle dt$$
$$= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_a^b \varphi'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Beachte, dass es sich hier um ein Kurvenintegral handelt:

$$\int_a^b \varphi'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{[\gamma]} \mathrm{d}\varphi.$$

Aufgabe 11.1*

a) Quadratische Ergänzung: Es ist $x^2 + (y-x)^2 + y^2 = 2(x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{2}y^2$. Damit

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{(\dots)} d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-3/2y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(x-y/2)^2} dxdy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Dabei wurden folgende Substitutionen verwendet:
(i) $t = \sqrt{2}(x - \frac{y}{2})$, $dt = \sqrt{2}dx$: Damit ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2(x-y/2)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(ii) $t = \sqrt{\frac{3}{2}}y$, $dt = \sqrt{\frac{3}{2}}dy$: Damit ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-3/2y^2} dy = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

b) Transformation: Es ist $u = x + y$, $v = -x + y$, d.h.

$$x^2 + (y-x)^2 + y^2 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2.$$

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Für den Transformationssatz braucht man noch die Determinante:

$$\det \Phi' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \det \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}.$$

Nach dem Transformationssatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{(\dots)} d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2/2 - 3/2v^2} \cdot \left| \det \Phi' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right| d(u,v) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du \int_{\mathbb{R}} e^{-3/2v^2} dv = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

Dabei wurden folgende Substitutionen verwendet:
(iii) $t = \sqrt{\frac{1}{2}}u$, $dt = \sqrt{\frac{1}{2}}du$: Damit ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

(iv) $t = \sqrt{\frac{3}{2}}v$, $dt = \sqrt{\frac{3}{2}}dv$: Damit ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-3/2v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\pi}.$$