Robert Denk 21.07.2016

Proseminar Analysis

WS 2016/17

1. Inhalt des Proseminars

Die Grundidee einer Fourierreihe besteht darin, eine Funktion als Überlagerung von Schwingungen, d.h. von Sinus- und Cosinus-Funktionen zu beschreiben. Dies wird z.B. angewendet bei der Analyse von Musikinstrumenten, aber auch im Mobilfunk. In beiden Fällen hat man eine periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Signal). Die Fourierreihe dazu beschreibt die Frequenz (akustisch die Tonhöhe) und die Signalstärke (akustisch die Lautstärke) der einzelnen Schwingungen. Die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ besitzt nur eine einzige Schwingung (siehe Abbildung 1. Ein Beispiel für ein unregelmäßigeres Signal ist in Abbildung 2 zu sehen.

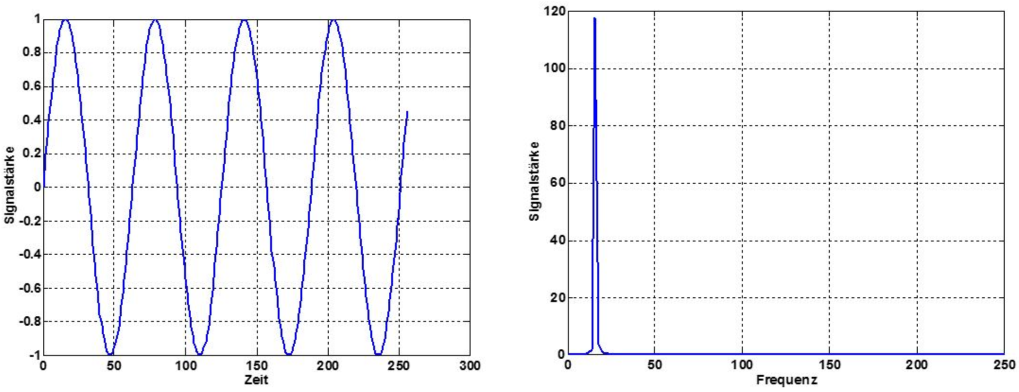

Abbildung 1: Eine reine Sinus-Schwingung und ihre Fourier-Koeffizienten

Man spricht dabei auch von der Darstellung der Funktion im Spektralbereich oder Frequenzbereich. Die Darstellung eines Signals als Überlagerung von Schwingungen ist nützlich, um z.B. Musikinstrumente zu analysieren. So kann man die unterschiedliche Klangfarbe (unterschiedliche Obertöne) anhand der Fourierreihe leicht erkennen. In Abbildung 3 sieht man das Spektrum einer Querflöte beim Spielen des Tons g, in Abbildung 4 als Vergleich dazu das Spektrum einer Violine.

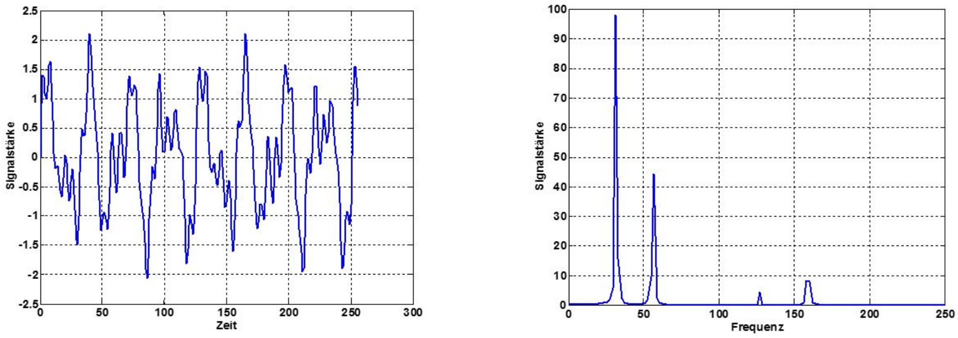

Abbildung 2: Die Überlagerung mehrerer Schwingungen

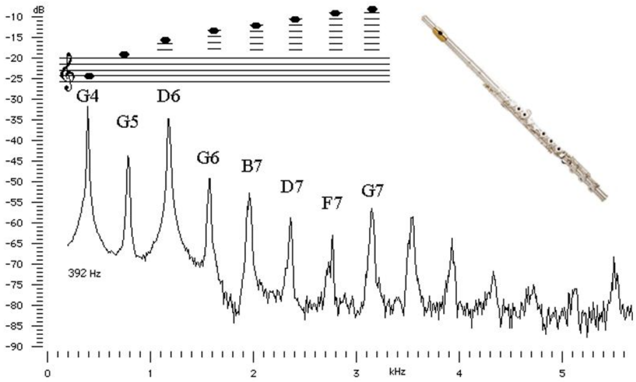

Abbildung 3: Die Spektraldarstellung einer Querflöte

Mathematisch besitzt eine Fourierreihe die Form

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

für eine 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In komplexer Schreibweise erhält man

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die mehrdimensionale Variante für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, welche in jeder Richtung 2π-periodisch ist, lautet

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik \cdot x} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei im Exponenten auf der rechten Seite $k \cdot x$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Es ergeben sich direkt folgende Fragen, welche im Proseminar geklärt und vorgetragen werden sollen:

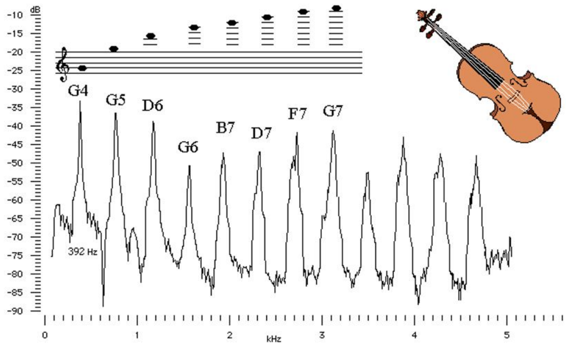

Abbildung 4: Die Spektraldarstellung einer Violine

- Sind die Koeffizienten a_k, b_k bzw. c_k eindeutig, und wie werden sie berechnet?
- Was kann man über die Konvergenz der Reihe sagen?
- In welchem Sinn bzw. für welche Funktionen konvergiert die Fourierreihe gegen die Funktion?
- Welche Eigenschaften besitzen die Fourier-Koeffizienten (z.B. Konvergenz gegen 0 für $|k| \to \infty$)?
- Welche Rechenregeln gelten für die Fourier-Koeffizienten (z.B. was weiß man über die Fourier-Koeffizienten der Ableitung von f)?

Ein Beispiel für die Rekonstruktion einer Sägezahn-förmigen Funktion ist in Abbildung 5 zu sehen.

Eine interessante Eigenschaft der in der Fourierreihe auftretenden trigonometrischen Funktionen $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ bzw. e^{ikx} liegt in der Orthogonalität: Für die Funktion $e_k\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{ikx}$ gilt

$$\langle e_k, e_j \rangle_{L^2} = 0 \quad (k \neq j).$$

Dabei ist das L^2-Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Wenn man also die Funktionen e_k noch entsprechend normiert, erhält man ein unendliches System von orthonormalen Vektoren, und die trigonometrischen Funktionen bilden eine unendliche (Hilbertraum-)Basis des entsprechenden Funktionenraums $L^2([0, 2\pi])$.

Wenn eine Funktion f periodisch mit einer anderen Periode als 2π ist, so erhält man die zugehörige Fourierreihe durch eine Skalierung. Für nicht-periodische Funktionen gibt es immer noch eine Darstellung als Überlagerung von Schwingungen, allerdings dann in Form eines Integrals:

$$f(x) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Man spricht von der Fouriertransformation. Die mehrdimensionale Formel sieht analog aus. Auch hier ergeben sich im Wesentlichen dieselben Fragen wie bei den Fourierreihen.

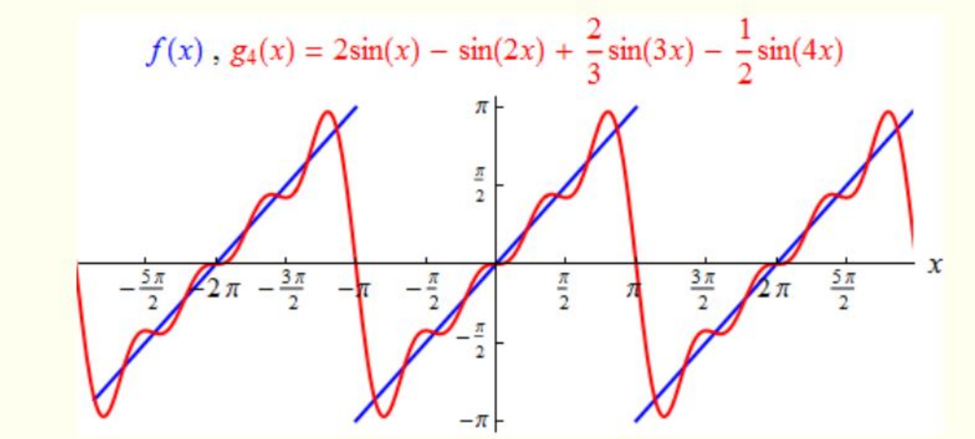

Abbildung 5: Die Approximation einer unstetigen Funktion durch den Anfang der Fourierreihe

Literatur

[1] H. Amann and J. Escher. *Analysis. I*. Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[2] H. Amann and J. Escher. *Analysis. II*. Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[3] R. N. Bracewell. *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. Circuits and Systems. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1986.

[4] P. L. Butzer and R. J. Nessel. *Fourier analysis and approximation*. Academic Press, New York-London, 1971. Volume 1: One-dimensional theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. 40.

[5] K. Chandrasekharan. *Classical Fourier transforms*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] R. Denk. *Skript zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen I (WS 2011/12)*. Universität Konstanz, 2012.

[7] R. Denk. *Skript zur Vorlesung Fouriertransformation (WS 2014/15)*. Universität Konstanz, 2015.

[8] R. Denk and R. Racke. *Kompendium der Analysis, Band 1*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011.

[9] R. E. Edwards. *Fourier series. A modern introduction. Vol. 1*, volume 64 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1979.

[10] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2008.

[11] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, sixth edition, 1991.

[12] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962.

[13] W. Rudin. *Reelle und komplexe Analysis*. R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999. Translated from the third English (1987) edition by Uwe Krieg.