Skript zur Vorlesung

Parabolische Differentialgleichungen

Sommersemester 2009

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 15. 4. 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Maximale Regularität und $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

1.1 Worum geht's? Dieser Abschnitt dient der Motivation und untersucht, größtenteils ohne Beweise, den Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und $\mathcal{R}$-sektoriellen Operatoren. Maximale Regularität hat sich in den letzten Jahren als wichtiges Hilfsmittel zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erwiesen. Eine äquivalente Beschreibung maximaler Regularität verwendet den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit, der später noch genauer diskutiert wird. Insgesamt wird damit die zeitlich lokale Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung zurückgeführt auf das genaue Studium der Resolvente des zur linearisierten Gleichung gehörigen Operators.

a) Linearisierung und maximale Regularität

1.2 Beispiel. Die Gleichung des *mean curvature flow* (Gleichung des mittleren Krümmungsflusses) beschreibt das zeitliche Verhalten einer Oberfläche und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\Big)\partial_i\partial_j u &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-1}$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer quasilinearen Gleichung: Hier hängen die Koeffizienten der höchsten auftretenden Ableitung (im Beispiel die zweiten Ableitungen) noch von der gesuchten Funktion u und ihren Ableitungen ab.

1.3 Bemerkung (Linearisierung)**.** Abstrakt kann man die obige Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u + F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

schreiben. Dabei ist $F(u)$ ein *linearer* Operator, der selbst noch von u abhängt, und $G(u)$ ist im allgemeinen ebenfalls eine nichtlineare Funktion von u. Die Linearisierung besteht nur darin, für festes u die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t v + F(u)v &= G(u), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

zu betrachten. Als Gleichung in v ist dies eine lineare Gleichung, und man kann diese Gleichung mit Methoden der linearen Operatortheorie und Halbgruppentheorie behandeln.

Die Idee der maximalen Regularität besteht darin, für die linearisierte Gleichung eine „optimale“ Regularität nachzuweisen. Dies erlaubt es dann, durch eine Iteration die nichtlineare Gleichung zu lösen. Grob gesprochen, darf man beim Lösen der linearen Gleichung keine Glattheit verlieren, da die Lösung beim nächsten Iterationsschritt wieder eingesetzt werden muss. Dieser Zugang erlaubt es, recht allgemeine quasilineare und auch voll nichtlineare Gleichungen zu lösen, jedoch ist die Lösung im allgemeinen nur lokal in der Zeit, d.h. es ist mit diesen Methoden schwer, global existierende Lösungen zu finden.

Der Begriff der maximalen Regularität hängt ganz wesentlich von den Funktionenräumen ab, in welchen die Gleichung betrachtet wird. Es gibt zwei wichtige Klassen von geeigneten Lösungsräumen: Der Raum der Hölder-stetigen Funktionen, und die L^p-Sobolevräume. Wir werden uns in dieser Vorlesung ausschließlich mit den Sobolevräumen befassen.

Die linearisierte Gleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \partial_t v + Av &= f \quad (t>0), \\ v(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-2}$$

Im folgenden sei $T \in (0,\infty]$ und $J = (0,T)$. Falls man von $f \in L^p(J;X)$ für einen Banachraum X ausgeht, wird man an v die Bedingung

$$\partial_t v \in L^p(J;X) \;\text{ und } v \in L^p(J;D(A))$$

stellen. Aber was ist dann der richtige Raum für u_0? Es handelt sich hier um einen Spurraum, da der Wert von v an der Stelle $t=0$ gebildet wird.

1.4 Definition und Satz (Spurraum)**.** *Sei $J=(0,T)$, $1 \le p \le \infty$ und $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator im Banachraum X. Dann ist*

$$I_p(A) = \{x = u\,|_{t=0}\colon u \in \mathbb{E} := W^{1,p}(J;X) \cap L^p(J;D(A))\}$$

ausgestattet mit $\|x\|_{I_p(A)} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}} : u\,|_{t=0} = x\}$ ein Banachraum und es gilt

$$D(A) \hookrightarrow I_p(A) \hookrightarrow X.$$

Man beachte, dass hier die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ von zwei Banachräumen eine kanonische lineare, injektive und stetige Abbildung bezeichnet (in den meisten Fällen als Identität wählbar).

Beweis. Die Soboleveinbettung besagt $W^{1,p}(J;X) \hookrightarrow C([0,T];X)$, was die Wohldefiniertheit von $u(0) \in X$ garantiert. Weiter ist

$$\|x\| = \|u(0)\| \le \sup_{t\in I} \|u(t)\| \le C\|u\|_{\mathbb{E}} \Longrightarrow I_p(A) \hookrightarrow X.$$

Ist $x \in D(A)$, betrachte $u(t) = e^{-t}x$. Dies zeigt

$$D(A) \hookrightarrow I_p(A).$$

Die anderen Aussagen werden hier nicht bewiesen. $\square$

1.5 Bemerkung. Falls A ein abgeschlossener linearer Operator ist, kann der Spurraum auch explizit beschrieben werden. Für $p > 1$ gilt

$$I_p(A) = (X, D(A))_{1-1/p,p}$$

wobei die Notation auf der rechten Seite den reellen Interpolationsraum mit Interpolations-Exponent $1 - 1/p$ und Integrabilitäts-Parameter p bezeichnet. Falls $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ und $D(A) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ist (wie das bei Differentialoperatoren A im Ganzraum eine natürliche Wahl ist), so folgt

$$I_p(A) = B_{pp}^{m-m/p}(\mathbb{R}^n).$$

Hier bezeichnet $B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ den Besovraum der Differenzierbarkeitsordnung s.

1.6 Definition. Sei $T \in (0, \infty]$, $J = (0, T)$, $1 \leq p \leq \infty$ und $A : D(A) \to X$ abgeschlossen. Der Operator A hat maximale (L^p-) Regularität (MR), falls für alle $(f, x) \in L^p(J; X) \times I_p(A) =: \mathbb{F}$ ein u existiert, das $(CP)_{f,x}$ fast überall löst, und falls ein $C = C(J) > 0$ existiert, so dass für alle $(f, x) \in \mathbb{F}$ die Ungleichung

$$\|\dot{u}\|_{L^p(J;X)} + \|Au\|_{L^p(J;X)} \leq C(\|f\|_{L^p(J;X)} + \|x\|_{I_p(A)}) \tag{1-3}$$

erfüllt ist. Wir schreiben $A \in MR_p(J; X)$ bzw. (für $J = (0, \infty)$) $A \in MR_p(X)$.

1.7 Bemerkung. In der obigen Definition wird nur $\dot{u} \in L^p(J; X)$, aber nicht $u \in L^p(J; X)$ verlangt. Falls J endlich ist oder $0 \in \rho(A)$ gilt, so kann $\|\dot{u}\|_{L^p(J;X)}$ durch $\|u\|_{W_p^1(J;X)}$ ersetzt werden. In diesem Fall hat A genau dann maximale Regularität, falls durch

$$\begin{pmatrix} \partial_t + A \\ \gamma_0 \end{pmatrix} : \mathbb{E} = W^{1,p}(J; X) \cap L^p(J; D(A)) \to \mathbb{F} = L^p(J; X) \times I_p(A)$$

ein Isomorphismus von Banachräumen gegeben ist. Hierbei steht $\gamma_0 \colon u \mapsto u(0)$ für den Spuroperator.

1.8 Bemerkung. a) Jeder Operator $A \in MR_p(X)$ erzeugt eine beschränkte, holomorphe C_0-Halbgruppe.

b) Falls $A \in MR_p(X)$ für ein $p \in [1, \infty)$ gilt, so folgt bereits $A \in MR_p(X)$ für alle $p \in (1, \infty)$. Deswegen schreiben wir ab jetzt $MR(X)$ statt $MR_p(X)$.

Die beiden Aussagen a) und b) werden hier nicht bewiesen.

Wir wollen jetzt noch mal kurz auf den Gedanken der Linearisierung quasilinearer Gleichungen zurückkommen. Die nichtlineare Gleichung lautete

$$\begin{aligned}\partial_t u + F(u)u &= G(u),\\ u(0) &= u_0.\end{aligned}$$

Die zugehörige Linearisierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial_t v + F(u)v &= G(u),\\ v(0) &= u_0\end{aligned}$$

Für festes u setzt man nun $A := F(u)$ und $f := G(u)$. In den meisten Fällen hängt der Spurraum $I_p(A)$ nicht von u ab, wovon wir hier ausgehen. Falls die linearisierte Gleichung maximale Regularität besitzt, so existiert ein Lösungsoperator

$$S_u\colon L^p(J;X) \times I_p(A) \to W_p^1(J;X) \cap L^p(J;D(A)), \quad (f, u_0) \mapsto v$$

der linearen Gleichung, der selbst noch von der (unbekannten) Lösung u abhängt.

Die nichtlineare Gleichung ist nun genau dann eindeutig lösbar, falls die Fixpunktgleichung

$$u = S_u(G(u), u_0)$$

eine Lösung besitzt. Wegen maximaler Regularität kennt man eine Abschätzung für den Lösungsoperator S_u. Falls auch für die rechte Seite $G(u)$ geeignete Abschätzungen gefunden werden können, so kann versucht werden, den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Dazu muss die rechte Seite $\Phi(u) := S_u(G(u), u_0)$ eine Kontraktion im geeigneten Lösungsraum $\mathbb{E}$ definieren. Um die Kontraktionseigenschaft zu erreichen, muss üblicherweise das Zeitintervall $J = (0, T)$ oder die Anfangsdaten u_0 klein gewählt werden. Bei beliebigen Anfangsdaten erhält man (in der Zeit) lokale Lösungen und damit eine maximale Lösung, d.h. eine Lösung auf dem maximalen Existenzintervall. Globale Lösungen können mit dieser Methode üblicherweise nicht bewiesen werden.

Die oben skizzierte Methode ist nur recht abstrakt als allgemeiner Satz formulierbar, funktioniert aber bei einer ganzen Reihe von nichtlinearen Randwertproblemen. Beispiele hierfür sind

- der oben genannte mean-curvature-flow,
- Stefan-Probleme, welche Phasenübergänge beschreiben (inklusive der Beschreibung des freien Randes zwischen den beiden Aggregatszuständen),
- Cahn-Hilliard-Gleichungen, welche etwa die Grenze zwischen zwei Legierungen in einem Metall beschreiben,
- die Navier-Stokes-Gleichung, welche das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten beschreibt, und verwandte Gleichungen, die zur Modellierung z.B. der Erdatmosphäre verwendet werden.

b) $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

Wir erinnern an den Begriff des sektoriellen Operators. Im folgenden sei

$$\Sigma_\varphi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \Big\}.$$

Mit $\sigma(A)$ bzw. $\rho(A)$ bezeichnen wir das Spektrum bzw. die Resolventenmenge des Operators A.

1.9 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi : \ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi, \ \sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

Sektorielle Operatoren erzeugen holomorphe Halbgruppen, wenn der Sektorwinkel groß genug ist. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

1.10 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Nach Bemerkung 1.8 erzeugen Operatoren $A \in MR(X)$ holomorphe Halbgruppen, sind also sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. nicht jeder sektorieller Operator besitzt maximale Regularität!

Vor einigen Jahren wurde eine Charakterisierung der Operatoren in $MR(X)$ gefunden. Bevor wir dieses Resultat formulieren können, benötigen wir noch einige Begriffe. Dabei treten einige aus der Analysis bekannte Objekte Banachraum-wertig auf, so z.B. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)$, der Schwartz-Raum der schnell fallenden X-wertigen Funktionen, oder $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)$, die Fouriertransformation auf diesem Raum. Definiert man den Raum der X-wertigen temperierten Distributionen durch

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X) := L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}), X),$$

so kann die Fouriertransformation zu einem stetigen Isomorphismus $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X)$ fortgesetzt werden. Die zugehörigen Beweise übertragen sich direkt aus dem skalaren Fall.

1.11 Definition. Sei X ein Banachraum.

a) Die Hilberttransformation $H\colon \mathscr{S}(\mathbb{R};X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R};X)$ ist definiert durch

$$Hf := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f \quad \text{ mit } m(\xi) := \frac{i\xi}{|\xi|}.$$

b) Der Banachraum X ist von Klasse $\mathcal{HT}$, falls ein $p \in (1,\infty)$ existiert, so dass die Hilberttransformation H zu einem stetigen linearen Operator $H \in L(L^p(\mathbb{R};X))$ fortgesetzt werden kann.

1.12 Bemerkung. a) Man kann zeigen, dass die Eigenschaft von Teil b) der obigen Definition nicht von der Wahl von p abhängt, d.h. falls die Bedingung aus b) für ein $p \in (1,\infty)$ erfüllt ist, dann auch für alle $p \in (1,\infty)$.

b) Falls X ein Hilbertraum ist, so ist X von Klasse $\mathcal{HT}$. Denn der Satz von Plancherel gilt für Hilberträume, und wegen $m \in L^\infty(\mathbb{R}; L(X))$ gilt somit

$$\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} \in L(L^2(\mathbb{R};X)) \quad \text{ mit } \|F^{-1} m \mathscr{F}\|_{L(L^2(\mathbb{R};X))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R};L(X))} = 1.$$

c) Falls X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist, so ist auch $L^p(G;X)$ von Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist die Hilberttransformation stetig in $L^p(G)$.

d) Es gibt andere Beschreibungen der Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist X genau dann von Klasse $\mathcal{HT}$, falls die Eigenschaft „X ist UMD-Raum“ gilt, wobei UMD für *unconditional martingale differences* steht.

1.13 Definition. Eine Familie $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ heißt $\mathcal{R}$-beschränkt, falls eine Konstante $C > 0$ und ein $p \in [1,\infty)$ so existiert, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_j \in \mathcal{T}$, $x_j \in X$ und alle Folgen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten $\{-1,1\}$-wertigen und symmetrischen Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ gilt

$$\Big\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j T_j x_j \Big\|_{L^p(\Omega,Y)} \le C \Big\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \Big\|_{L^p(\Omega,X)}. \tag{1-4}$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{R}(\mathcal{T}) := \inf\{C > 0 : \text{(1-4) gilt}\}$ die $\mathcal{R}$-Schranke von $\mathcal{T}$.

1.14 Bemerkung. a) Die obige Formulierung bedeutet für die einzelnen Zufallsgrößen $P(\{\varepsilon_j = 1\}) = P(\{\varepsilon_j = -1\}) = \frac{1}{2}$. Da das Maß $P \circ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^{-1}$ diskret ist, kann die Unabhängigkeit durch folgende Bedingung angegeben werden:

$$P(\{\varepsilon_1 = z_1, \dots, \varepsilon_N = z_N\}) = 2^{-N} \quad \Big((z_1, \dots, z_N) \in \{-1,1\}^N,\ N \in \mathbb{N} \Big).$$

Eine nicht-stochastische Beschreibung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ist somit gegeben durch die Ungleichung

$$\exists\, C > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, T_j \in \mathcal{T}\ \forall\, x_j \in X$$
$$\Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm 1} \Big\|\sum_{j=1}^N z_j T_j x_j\Big\|_Y^p\Big)^{1/p} \le C\Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm 1} \Big\|\sum_{j=1}^N z_j x_j\Big\|_X^p\Big)^{1/p}. \tag{1-5}$$

Die stochastische Beschreibung ist dennoch manchmal günstig; insbesondere kann man als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ wählen, wobei die ε_j dann durch die Rademacher-Funktionen gegeben sind (siehe unten). Es ist nicht klar, woher der Namenszusatz „$\mathcal{R}$" stammt; möglich sind „Rademacher", „randomisiert".

Nach diesen Definitionen können wir die Charakterisierung maximaler Regularität angeben. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

1.15 Satz (Weis 2001)**.** *Sei X ein Banachraum der Klasse $\mathcal{HT}$, $1 < p < \infty$, A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A > \frac{\pi}{2}$. Es gilt genau dann $A \in MR(X)$, falls die Menge*

$$\big\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi\big\} \subset L(X)$$

für ein $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

In Analogie zum Begriff eines sektoriellen Operators definiert man:

1.16 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A $\mathcal{R}$-sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\mathcal{R}\big\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi\big\} < \infty.$$

Der $\mathcal{R}$-Winkel von A ist in diesem Fall das Supremum aller Winkel, für die die obige $\mathcal{R}$-Schranke endlich ist.

2. $\mathcal{R}$-Beschränktheit und Fourier-Multiplikatoren

2.1 Worum geht's? Nachdem im letzten Kapitel der Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und $\mathcal{R}$-Beschränktheit diskutiert wurde, geht es jetzt um den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit selbst. Eine gute Beschreibung verwendet die Rademacher-Funktionen als konkretes Beispiel für den stochastischen Zugang. Einige wichtige Prinzipien der $\mathcal{R}$-Beschränktheit werden diskutiert, welche es in den Anwendungen erlauben werden, diese Eigenschaft nachzuweisen.

a) Eigenschaften $\mathcal{R}$-beschränkter Operatorfamilien

2.2 Definition (Rademacher-Funktionen)**.** Die Rademacher-Funktionen $r_n\colon [0,1] \to \{-1,1\}$ sind definiert durch

$$r_n(t) := \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t) \quad (t \in [0,1]).$$

Laut Definition ist

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,\frac{1}{2}), \\ -1, & t \in (\frac{1}{2},1). \end{cases}$$

Die Funktion r_2 nimmt den Wert 1 auf den Teilintervallen $(0,\frac{1}{4})$ und $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ an. Man rechnet sofort nach, dass

$$\int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt = \delta_{nm} \quad (n,m \in \mathbb{N})$$

gilt. Außerdem ist

$$\lambda(\{t \in [0,1] : r_{n_1}(t) = z_1,\dots,r_{n_M}(t) = z_M\}) = \frac{1}{2^M} = \prod_{j=1}^M \lambda(\{t \in [0,1] : r_{n_j}(t) = z_j\}).$$

Somit bildet $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\lambda)$ wie in Definition 1.13. Man kann sich die Folge $(\varepsilon_j)_j$ in dieser Definition stets als Rademacher-Funktionen vorstellen, da die Aussage dieser Definition nur die Wahrschenlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verwendet. Umgekehrt gelten Aussagen über die Rademacher-Funktionen analog für beliebige Folgen von Zufallsgrößen wie in Definition 1.13.

2.3 Definition. Sei X ein Banachraum und $1 \le p < \infty$. Dann ist $\operatorname{Rad}_p(X)$ definiert als der Banachraum aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, für welche

$$\big\|(x_n)_n\big\| := \Big\| \sum_{n=1}^\infty r_n x_n \Big\|_{L^p([0,1];X)}$$

endlich ist.

2.4 Bemerkung. Da die Rademacher-Funktionen unabhängig sind, kann man eine Folge $(x_n)_n$ mit ihrer Summe $\sum_n r_n x_n \in L^p([0,1];X)$ identifizieren. Denn falls $\sum_n r_n x_n = 0$ in $L^p([0,1];X)$ gilt, so folgt $\sum_n r_n f(x_n) = 0$ für alle $f \in X'$. Nimmt man nun das L^2-Skalarprodukt mit r_{n_0} für ein festes n_0, so erhält man aufgrund der Orthogonalität $f(x_{n_0}) = 0$ für alle $f \in X'$ und damit $x_{n_0} = 0$. Die Abbildung $\mathrm{Rad}_p(X) \to L^p([0,1];X)$, $(x_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^\infty r_n x_n$ ist somit injektiv, und $\mathrm{Rad}_p(X)$ kann als Teilraum von $L^p([0,1];X)$ aufgefasst werden.

2.5 Satz (Ungleichung von Kahane)**.** *Die Räume* $\mathrm{Rad}_p(X)$ *sind isomorph für* $1 \le p < \infty$*, d.h. es existieren Konstanten* $C_p > 0$ *mit*

$$\frac{1}{C_p}\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)} \le \Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le C_p\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)}.$$

Der Beweis dieser Ungleichung ist im skalaren Fall $X = \mathbb{C}$ elementar, für beliebige Banachräume X jedoch recht kompliziert und wird hier weggelassen. Im skalaren Fall spricht man von der Ungleichung von Khinchine.

2.6 Lemma (Kontraktionsprinzip von Kahane)**.** *Sei* $1 \le p < \infty$*. Dann gilt für alle* $N \in \mathbb{N}$*, für alle* $x_j \in X$ *und alle* $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ *mit* $|a_j| \le |b_j|$*,* $j = 1, \dots, N$

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le 2\Big\|\sum_{j=1}^N b_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)}. \tag{2-1}$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $b_j = 1$ und $|a_j| \le 1$ für alle $j = 1, \dots, N$ annehmen. Dies liegt daran, dass mit x_n auch $b_j x_j$ im Banachraum X liegt und somit nach dem Übergang von x_j zu $b_j x_j$ der zu betrachtende Fall vorliegt. Betrachtet man weiter $\mathrm{Re}\, a_j$ und $\mathrm{Im}\, a_j$ getrennt, so bleibt also noch für $a_j \in \mathbb{R}$ mit $|a_j| \le 1$ die Ungleichung

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le \cdot \Big\|\sum_{j=1}^N b_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \tag{2-2}$$

zu zeigen. Dazu sei $\{e^{(k)}\}_{k=1,\dots,2^N}$ eine Durchnummerierung der Ecken des Würfels $[-1,1]^N$. Wegen $a := (a_1, \dots, a_N)^T \in [-1,1]^N$ lässt sich a als Konvexkombination der $e^{(k)}$ darstellen, d.h. es existieren $\lambda_k \in [0,1]$ mit

$$\sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k = 1 \quad \text{und} \quad a = \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k e^{(k)}.$$

Damit gilt für $e^{(k)} = (e_1^{(k)}, \dots, e_N^{(k)})^T$

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{j=1}^N a_j r_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} &\le \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k \Big\| \sum_{j=1}^N r_j e_j^{(k)} x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} \\ &\le \max_{1\le k\le 2^N} \Big\| \sum_{j=1}^N r_j e_j^{(k)} x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} = \Big\| \sum_{j=1}^N r_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)}.\end{aligned}$$

Dabei wird für die letzte Gleichheit verwendet, dass $\{r_j : j = 1, ..., N\}$ und $\{r_j e_j^{(k)} : j = 1, ..., N\}$ die gleiche gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. $\square$

2.7 Lemma. *a) Falls die Bedingung (1-4) in der Definition 1.13 für ein $p \in [1,\infty)$ gilt, so für alle $p \in [1,\infty)$. Für die zugehörigen $\mathcal{R}$-Schranken $\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$ gilt*

$$\frac{1}{C_p^2}\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) \le \mathcal{R}_p(\mathcal{T}) \le C_p^2 \mathcal{R}_2(\mathcal{T})$$

mit den Konstanten C_p aus Satz 2.5.

b) Eine Menge $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ ist genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) \le C$, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $T_1, \dots, T_N \in \mathcal{T}$ durch

$$\mathbf{T}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y_n := \begin{cases} T_n x_n, & n \le N, \\ 0, & n > N \end{cases}$$

ein beschränkter Operator $\mathbf{T} \in L(\mathrm{Rad}_2(X))$ mit Norm $\|\mathbf{T}\| \le C$ definiert wird.

Beweis. Teil a) folgt direkt aus der Ungleichung von Kahane, Teil b) ist eine Umformulierung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und eine Anwendung der p-Unabhängigkeit aus Teil a). $\square$

2.8 Bemerkung. a) Falls $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist, so ist $\mathcal{T}$ gleichmäßig beschränkt mit $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$. Dies folgt direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit mit $N = 1$.

b) Falls X und Y Hilberträume sind, so ist $\mathcal{R}$-Beschränktheit äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit. Denn in diesem Fall sind auch $L^2([0,1];X)$ bzw. $L^2([0,1];Y)$ Hilberträume, und $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1];X)$ und $(r_n T_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1];Y)$ sind orthogonale Folgen. Falls $\|T\| \le C_{\mathcal{T}}$ für alle $T \in \mathcal{T} \subset L(X,Y)$ gilt, so folgt

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|^2_{L^2[0,1];Y)} = \sum_{n=1}^N \|r_n T_n x_n\|^2_{L^2([0,1];Y)}$$

$$= \sum_{n=1}^N \|T_n x_n\|_Y^2 \le C_{\mathcal{T}}^2 \sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2$$
$$= C_{\mathcal{T}}^2 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \Big\|^2_{L^2([0,1];X)}.$$

2.9 Bemerkung. Seien X, Y, Z Banachräume und $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset L(X,Y)$ und $\mathcal{U} \subset L(Y,Z)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch

$$\mathcal{T} + \mathcal{S} := \{T + S : T \in \mathcal{T},\, S \in \mathcal{S}\}$$

und

$$\mathcal{U}\mathcal{T} := \{UT : U \in \mathcal{U},\, T \in \mathcal{T}\}$$

$\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}\{\mathcal{T} + \mathcal{S}\} \le \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{S}),\ \mathcal{R}(\mathcal{U}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{U})\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Denn seien $S_n \in \mathcal{S}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $U_n \in \mathcal{U}$ für $n = 1, \dots, N$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n (T_n + S_n) x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} \le \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} + \Big\| \sum_{n=1}^N r_n S_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)}$$

und

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n U_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Z)} \le \mathcal{R}(\mathcal{U}) \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)}.$$

2.10 Lemma (Square function estimate)**.** *Sei $(G, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $X = L^q(\mu)$, und sei $1 \le q < \infty$. Dann ist $\mathcal{T} \subset L(X)$ genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert mit*

$$\Big\| \Big(\sum_{j=1}^N |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mu)} \le M \Big\| \Big(\sum_{j=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mu)}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $f_n \in L^q(\mu)$.

Beweis. Wir schreiben $f \approx g$, falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit $C_1|f| \le |g| \le C_2|f|$. Um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit nachzurechnen, können wir nach der Ungleichung von Kahane die $\mathcal{R}$-Schranke $\mathcal{R}_q$ betrachten. Man berechnet

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n f_n \Big\|^q_{L^q([0,1];L^q(\mu))} = \int_0^1 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\cdot) \Big\|^q_{L^q(G;\mu)} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_G \Big|\sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega)\Big|^q d\mu(\omega)\, dt \\
&= \int_G \int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega)\Big|^q dt d\mu(\omega) \\
&\approx \int_G \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega)\Big|^2 dt\Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \int_G \Big(\sum_{n=1}^N |f_n(\omega)|^2\Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \Big\|\Big(\sum_{n=1}^N |f_n|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^q(\mu)}^q.
\end{aligned}$$

Dabei wurden der Satz von Fubini und die Khinchine-Ungleichung verwendet. Auf beide Seiten der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit angewendet, erhalten wir die Behauptung. □

2.11 Beispiel. Die Familie $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$, $T_n f(\cdot) := f(\cdot - n)$ von Translationen ist für $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$ nicht $\mathcal{R}$-beschränkt. Denn für $f_n = \chi_{[0,1]}$ gilt

$$\Big\|\Big(\sum_{n=0}^{N-1} |T_n f_n|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|\chi_{[0,N]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/p},$$

$$\Big\|\Big(\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/2}\|\chi_{[0,1]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/2},$$

und für $1 \le p < 2$ gilt $\frac{N^{1/p}}{N^{1/2}} \to \infty$ für $N \to \infty$. Ähnlich geht der Beweis für $p > 2$.

2.12 Lemma. *a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Zu $\varphi \in L^\infty(G)$ definiere $m_\varphi \in L(L^p(G;X))$ durch $(m_\varphi f)(x) := \varphi(x) f(x)$. Dann gilt für $r > 0$*

$$\mathcal{R}_p\Big(\{m_\varphi : \varphi \in L^\infty(G),\ \|\varphi\|_\infty \le r\}\Big) \le 2r.$$

b) Sei $1 \le p < \infty$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{T} \subset L(L^p(G;X), L^p(G;Y))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}$-Schranke τ. Dann gilt

$$\mathcal{R}_p\Big(\{m_\varphi T m_\psi : T \in \mathcal{T},\ \varphi,\psi \in L^\infty(G), \|\varphi\|_\infty \le r,\ \|\psi\|_\infty \le s\}\Big) \le 4rs\tau.$$

Beweis. a) Nach dem Satz von Fubini und dem Kontraktionsprinzip gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^N r_k m_{\varphi_k} f_k\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X)} &= \Big\|\sum_{k=1}^N r_k\varphi_k f_k\Big\|_{L^p(G;L^p([0,1];X)} \\ &\le 2r\Big\|\sum_{k=1}^N r_k f_k\Big\|_{L^p(G;L^p([0,1];X)} \\ &= 2r\Big\|\sum_{k=1}^N r_k f_k\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X)}.\end{aligned}$$

b) folgt aus a) und Bemerkung 2.9. □

2.13 Satz. *Sei $\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch*

$$\operatorname{co}\mathcal{T} := \Big\{\sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n\in\mathbb{N},\, T_k\in\mathcal{T},\, \lambda_k\in[0,1],\, \sum_{k=1}^n\lambda_k = 1\Big\}$$

und

$$\operatorname{aco}\mathcal{T} := \Big\{\sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n\in\mathbb{N},\, T_k\in\mathcal{T},\, \lambda_k\in\mathbb{C},\, \sum_{k=1}^n|\lambda_k| = 1\Big\}$$

und der Abschluss von $\operatorname{co}\mathcal{T}$ *und* $\operatorname{aco}\mathcal{T}$ *in der starken Operatortopologie $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{co}\mathcal{T}}^s)\le\mathcal{R}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{aco}\mathcal{R}}^s)\le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$.*

Beweis. a) Seien $T_1,\dots,T_N\in\operatorname{co}(\mathcal{T})$. Dann existieren $\lambda_{k,j_k}\in[0,1]$, $j_k=1,\dots,m_k$, $T_{k,j_k}\in\mathcal{T}$ mit $\sum_{j_k=1}^{m_k}\lambda_{k,j_k}=1$ und $T_k=\sum_{j_k=1}^{m_k}\lambda_{k,j_k}T_{k,j_k}$.

Setze $\lambda_{k,j_k}:=0$ für $j_k>m_k$ und $l:=(j_1,\dots,j_N)$, $T_{kl}:=T_{k,j_k}$ $(k=1,\dots,N,\ l\in\mathbb{N})$ und $\lambda_l:=\lambda_{k,j_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{k,j_N}$ für $l\in\mathbb{N}^n$. Dann ist

$$T_k=\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l T_{kl}\quad(k=1,\dots,N),$$

wobei $\lambda_l\in[0,1]$ und $\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l=1$. Beachte, dass es sich hierbei um endliche Summen handelt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^N r_k T_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];Y)} &\le \sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l\Big\|\sum_{k=1}^N r_k T_{kl}x_k\Big\|_{L^p([0,1];Y)} \\ &\le \mathcal{R}(\mathcal{T})\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l\Big\|\sum_{k=1}^N r_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];X)} \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{T})\Big\|\sum_{k=1}^N r_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];X)}.\end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{R}(\operatorname{co}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$.

b) Nach dem Kontraktionsprinzip gilt $\mathcal{R}(\mathcal{T}_0) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ für

$$\mathcal{T}_0 := \{\lambda T : T \in \mathcal{T},\, \lambda \in \mathbb{C},\, |\lambda| \le 1\}.$$

Wegen $\operatorname{co}\mathcal{T}_0 = \operatorname{aco}\mathcal{T}$ folgt $\mathcal{R}(\operatorname{aco}\mathcal{T}) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ nach a).

c) Direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit folgt die Absgeschlossenheit unter der starken Operatortopologie. $\square$

2.14 Korollar. *Sei $(G, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Sei*

$$\mathcal{N} := \{N \colon G \to L(X,Y) \,|\, N \text{ stark messbar mit } N(G) \subset \mathcal{T}\}.$$

Zu $h \in L^1(G,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere

$$T_{N,h}x := \int_G h(\omega)N(\omega)x d\mu(\omega) \quad (x \in X).$$

Dann ist

$$\mathcal{R}\{T_{N,h} : \|h\|_{L^1(G,\mu)} \le 1,\ N \in \mathcal{N}\} \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Beweis. Zu $x_1, \dots, x_N \in X$, $h \in L^1(G,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere die messbare Abbildung

$$M \colon G \to X^N,\ M(\omega) := \big(N(\omega)x_j\big)_{j=1,\dots,N}.$$

Dann existiert eine messbare Partition $G = \sum_{j=1}^\infty G_j$ und $\omega_j \in G_j$ mit

$$\|N(\omega)x_k - N(\omega_j)x_k\|_Y < \varepsilon \quad \text{für fast alle } \omega \in G_j \text{ und alle } k = 1, \dots, N.$$

Setze

$$S := \sum_{j=1}^\infty \Big(\int_{G_j} h(\omega)d\mu(\omega)\Big)N(\omega_j).$$

Dann gilt $\|T_{N,h}x_k - Sx_k\|_Y < \varepsilon$ für alle $k = 1, \dots, N$. Somit liegt $T_{N,h}$ in der durch $x_1, \dots, x_N$ und ε gegebenen Umgebung von S bezüglich der starken Operatortopologie. Wegen $S \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$ folgt $T_{N,h} \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$, und die Behauptung ergibt sich aus Satz 2.13. $\square$

2.15 Korollar. *Sei $N \colon \Sigma_{\theta'} \to L(X,Y)$ holomorph, und $N(\partial\Sigma_\theta \setminus \{0\})$ $\mathcal{R}$-beschränkt für ein $\theta < \theta'$. Dann ist $N(\Sigma_\theta)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, und für jedes $\theta_1 < \theta$ ist $\{\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) : \lambda \in \Sigma_{\theta_1}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Durch Betrachten von $M(\lambda) := N(\lambda^{2\theta/\pi})$ können wir $\theta = \frac{\pi}{2}$ annehmen. Nach der Poissonschen Formel gilt

$$N(\alpha + i\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (s-\beta)^2} N(is)ds \quad (\alpha > 0).$$

Wegen $\|\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+(\cdot-\beta)^2}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ folgt die erste Behauptung aus Korollar 2.14.

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) = \int_{\partial\Sigma_\theta} h_\lambda(\mu)N(\mu)d\mu \quad (\lambda \in \Sigma_{\theta_1})$$

für $h(\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$. Wegen $\sup_{\lambda\in\Sigma_{\theta_1}} \|h_\lambda\|_{L^1(\partial\Sigma_\theta)} < \infty$ folgt die zweiten Behauptung ebenfalls aus Korollar 2.14. □

2.16 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt und $H: G \to L(X,Y)$ holomorph. Dann ist $H(K)$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Sei $z_0 \in K$. Dann existiert ein $r > 0$ mit

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(z_0)\frac{(z-z_0)^k}{k!} \quad (|z - z_0| \le r),$$

wobei die Reihe absolut konvergiert und

$$\rho_0 := \sum_{k=0}^{\infty} \|H^{(k)}(z_0)\|_{L(X,Y)}\frac{r^k}{k!} < \infty.$$

Nach Satz 2.13 folgt $\mathcal{R}(H(B(z_0, r)) \le 2\rho_0$. Durch Überdeckung von K durch endlich viele Kugeln erhält man die Behauptung. □

2.17 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 < p < \infty$. Sei Λ eine Menge und $\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von messbaren Kernen $k_\lambda: G \times G \to L(X,Y)$ mit*

$$\mathcal{R}_p\big\{k_\lambda(z,z') : \lambda \in \Lambda\big\} \le k_0(z,z') \quad (z, z' \in G).$$

Für den zugehörigen skalaren Integraloperatoren

$$(K_0 f)(z) = \int_G k_0(z,z')f(z')dz' \quad (f \in L^p(G))$$

gelte $K_0 \in L(L^p(G))$. Definiere

$$(K_\lambda f)(z) = \int_G k_\lambda(z,z')f(z')dz' \quad (f \in L^p(G;X)).$$

Dann gilt $K_\lambda \in L(L^p(G;X), L^p(G;Y))$ mit

$$\mathcal{R}_p\big(\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\big) \le \|K_0\|_{L(L^p(G))}.$$

Beweis. Wir setzen direkt in die Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^N r_j K_{\lambda_j} f_j\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;Y))}\\
&\qquad = \Big(\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^N r_j(t)\int_G k_{\lambda_j}(\cdot,z')f_j(z')dz'\Big\|^p_{L^p(G;Y)} dt\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big(\int_0^1 \Big\|\int_G\sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(\cdot,z')f_j(z')dz'\Big\|^p_{L^p(G;Y)} dt\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big(\int_0^1 \int_G\Big\|\int_G\sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')dz'\Big\|^p_{Y} dz\,dt\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big(\int_G \int_0^1\Big\|\int_G\sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')dz'\Big\|^p_{Y} dt\,dz\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Definiert man $\varphi(t,z,z') := \sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')$, so ist das Integral über t im letzten Ausdruck gerade $\|\int_G \varphi(\cdot,z,z')dz'\|^p_{L^p([0,1])}$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\Big\|\int_G \varphi(\cdot,z,z')dz'\Big\|_{L^p([0,1])} \le \int_G \|\varphi(\cdot,z,z')\|_{L^p([0,1])}dz'$$

für Bochner-Integrale und erhalten unter Verwendung der Voraussetzung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^N r_j K_{\lambda_j} f_j\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;Y))}\\
&\qquad \le \Big(\int_G\Big[\int_G\Big\|\sum_{j=1}^N r_j(\cdot)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')\Big\|_{L^p([0,1];Y)}dz'\Big]^p dz\Big)^{1/p}\\
&\qquad \le \Big(\int_G\Big[\int_G k_0(z,z')\Big\|\sum_{j=1}^N r_j(\cdot)f_j(z')\Big\|_{L^p([0,1];X)}dz'\Big]^p dz\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big\|K_0\Big(\Big\|\sum_{j=1}^N r_j f_j(\cdot)\Big\|_{L^p([0,1];X)}\Big)\Big\|_{L^p(G)}\\
&\qquad \le \|K_0\|_{L(L^p(G))}\Big\|\Big(\Big\|\sum_{j=1}^N r_j f_j(\cdot)\Big\|_{L^p([0,1];X)}\Big)\Big\|_{L^p(G)}\\
&\qquad = \|K_0\|_{L(L^p(G))}\Big\|\sum_{j=1}^N r_j f_j\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X))}
\end{aligned}$$

□

Wir wissen nach dem Satz von Weis, dass ein sektorieller Operator A genau dann maximale Regularität besitzt, falls er $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Die obigen Aussagen über $\mathcal{R}$-Beschränktheit erlauben es eine Reihe dazu äquivalenter Aussagen zu formulieren.

2.18 Satz. *Sei A der Erzeuger einer beschränkten holomorphen Halbgruppe T. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel $\varphi_{\mathcal{R}} = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\delta > 0$.*

(ii) *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\{t^n(it - A)^{-n} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.*

(iii) *Die Familie $\{T_z : z \in \Sigma_\delta\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

(iv) *Die Familie $\{T_t, tAT_t : t > 0\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Zum Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Schreibe

$$(it - A)^{-n+1} = (n-1)i \int_t^\infty (is - A)^{-n} ds$$

und damit

$$(it)^{n-1}(it - A)^{-n+1} = \int_0^\infty h_t(s)\big[(is)^n(is - A)^{-n}\big]ds$$

für die Funktion $h_t(s) := (n-1)t^{n-1}s^{-n}\chi_{[t,\infty)}$. Es gilt $\int_0^\infty h_t(s)ds = 1$, und nach Korollar 2.14 folgt die Aussage (ii) für $n-1$ anstelle von n. Iterativ erhält man, dass (ii) für $n = 1$ gilt. Verwende nun Korollar 2.15, um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_{\pi/2}\}$ zu zeigen. Durch Reihenentwicklung (ähnlich wie beim Beweis der Analytizität einer Halbgruppe) kann man zeigen, dass $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ sogar auf einem größeren Sektor $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Dies folgt ebenfalls aus Korollar 2.14 und der Darstellung

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt.$$

(i)$\Longrightarrow$(iii) folgt analog aus

$$T_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) kann man unter Verwendung von Korollar 2.15 zeigen. □

b) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Mikhlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

2.19 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \le 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha \mathscr{F} u = -\mathscr{F}^{-1}\frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}\mathscr{F} f$$

als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Mikhlin, der eine Aussage über Fourier-Multiplikatoren trifft.

2.20 Definition (Fourier-Multiplikator)**.** Seien X, Y Banachräume, $1 \le p \le \infty$ und sei $m\colon \mathbb{R}^n \to L(X, Y)$ eine beschränkte messbare Funktion. Wegen $\mathscr{F}^{-1} \in L(L^1(\mathbb{R}^n; X), L^\infty(\mathbb{R}^n; Y))$ induziert m eine Abbildung $T_m\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X) \to L^\infty(\mathbb{R}^n; Y)$ durch

$$T_m f := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)).$$

Die Funktion m heißt Fourier-Multiplikator, falls

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;Y)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)} \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)),$$

d.h. falls T_m eindeutig zu einem stetigen Operator $T_m \in L(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^p(\mathbb{R}^n; Y))$ fortgesetzt werden kann. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators M. Wir schreiben $\mathrm{op}(m) := \mathscr{F} m \mathscr{F}^{-1}$ und $\mathrm{symb}(M) := m$.

Wir betrachten zunächst den skalaren Fall $X = Y = \mathbb{C}$.

2.21 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\mathrm{op}(m) \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \le c_k \to \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \ge c_k$ auf A_n. Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int |m(\xi)g_k(\xi)|^2 d\xi \ge c_k^2\lambda(A_k) = c_k^2\|g_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $\operatorname{op}(m)$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p-Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

2.22 Satz (Mikhlin). *Sei $1 < p < \infty$ und $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$|\xi|^{|\beta|}|D^\beta m(\xi)| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\beta| \le [\tfrac{n}{2}]+1),$$

(ii) $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$\left|\xi^\beta D^\beta m(\xi)\right| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p-Fouriermultiplikator mit

$$\|\operatorname{op}(m)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le c(n,p)C_M,$$

wobei die Konstante $c(n,p)$ nur von n und p abhängt.

2.23 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Mikhlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht.

b) Sei die Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(r\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \le k$.

Denn z.B. für $\beta = (1,0,\dots,0)$ gilt

$$\begin{aligned}(\partial_{\xi_1} m)(\rho\xi) &= \lim_{h\to 0} \frac{m(\rho\xi + he_1) - m(\rho\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} \rho^d\, \frac{m(\xi + \frac{h}{\rho}e_1) - m(\xi)}{\rho\frac{h}{\rho}}\\ &= \rho^{d-1}\partial_{\xi_1} m(\xi).\end{aligned}$$

Für beliebige β folgt die Aussage dann iterativ.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Mikhlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \le [\frac{n}{2}]+1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|}D_\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil a). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \left|m_\beta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\right| \le \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Mikhlin wird die Frage aus Bemerkung 2.19 beantwortet.

2.24 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W_p^2(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 2.19 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \leq 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \leq 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \geq 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \geq 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Mikhlin-Bedingung. $\square$

Während der Satz von Mikhlin für den skalaren Fall hinreichende Kriterien für Fourier-Multiplikatoren angibt, ist für allgemeine Banachräume X, Y keines der beiden Kriterien hinreichend. Falls X und Y von Klasse $\mathcal{HT}$ sind, so gilt jedoch das Analogon des Mikhlinschen Satzes, wenn man die Normbeschränktheit durch die $\mathcal{R}$-Beschränktheit ersetzt, wie der folgende Satz zeigt. Die Aussage dieses Satzes mit $n = 1$ ist auch die wesentliche Beweiszutat des Satzes von Weis über maximale Regularität.

2.25 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$, und sei $1 < p < \infty$. Sei $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X,Y))$ mit*

$$\mathcal{R}\Big(\big\{|\xi|^{|\alpha|} D^\alpha m(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n\big\}\Big) =: \kappa < \infty.$$

Dann ist m ein vektorwertiger Fourier-Multiplikator mit

$$\|T\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))} \leq C\kappa,$$

wobei die Konstante C nur von n, p, X und Y abhängt.

Der Beweis dieses Satzes findet sich etwa in [10] oder [6].

Man beachte, dass in diesem Satz die $\mathcal{R}$-Beschränktheit gefordert wird, um die Norm-Beschränktheit der zugehörigen Fourier-Multiplikatoren zu erhalten. Um sogar $\mathcal{R}$-Beschränktheit zu erhalten (und damit eine Art Iteration möglich zu machen), braucht man noch eine weitere Eigenschaft der Banachräume X und Y.

2.26 Definition. Ein Banachraum X hat die Eigenschaft (α) (englisch: „property (α)“), falls eine Konstante $C > 0$ so existiert, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{ij}| \leq 1$ und alle $x_{ij} \in X$ gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(u) \alpha_{ij} x_{ij} \Big\|_X du dv \leq C \int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(v) x_{ij} \Big\|_X du dv.$$

D.h. das Kontraktionsprinzip gilt sogar für Doppelsequenzen $(r_i r_j)_{i,j=1}^N$. Hierbei sind r_i wieder die Rademacher-Funktionen.

2.27 Bemerkung. a) Die Eigenschaft (α) ist unabhängig von der Eigenschaft, dass X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist.

b) Falls $X = L^p(G,\mu)$ mit einem σ-finiten Maß μ, so hat X die Eigenschaft (α), wie man leicht mit Hilfe des Satzes von Fubini sieht. Falls X ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(G,\mu)$ ist, gilt Eigenschaft (α) ebenfalls. Somit haben insbesondere Sobolev- und Besovräume die Eigenschaft (α).

c) Falls X die Eigenschaft (α) hat und $Y = L^p(G,\mu;X)$ für ein σ-finites Maß μ ist, so hat auch Y die Eigenschaft (α). Auch dies folgt schnell mit dem Satz von Fubini.

Für Räume mit Eigenschaft (α) von Klasse $\mathcal{HT}$ gilt folgende Verschärfung des vektorwertigen Satzes von Mikhlin.

2.28 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$ mit Eigenschaft (α). Sei $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Betrachte die Menge*

$$M := \Big\{ m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X,Y)) : \xi^\alpha D^\alpha m(\xi) \in \mathcal{T} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n \Big\}.$$

Dann ist $\{T_m : m \in M\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_p(\{T_m : m \in M\}) \le C\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$, wobei die Konstante C nur von p, m, X und Y abhängt.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [10].

2.29 Korollar. *Sei $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von matrizenwertigen Funktionen $m_\lambda \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N\times N})$ mit*

$$|\xi^\alpha D^\alpha m_\lambda(\xi)|_{\mathbb{C}^{N\times N}} \le C_0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n,\ \lambda \in \Lambda).$$

Dann ist $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit Schranke $C \cdot C_0$, wobei C nur von p und N abhängt.

Beweis. Der Raum $X = \mathbb{C}^N$ ist von Klasse $\mathcal{HT}$ und besitzt die Eigenschaft (α). Offensichtlich ändert sich die Eigenschaft der $\mathcal{R}$-Beschränktheit nicht, wenn man auf X zu einer äquivalenten Norm übergeht, d.h. wir können die euklidische Norm auf X wählen. Nach Voraussetzung ist

$$\big\{ \xi^\alpha D_\xi^\alpha m_\lambda(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n,\ \lambda \in \Lambda \big\} \subset L(X)$$

normbeschränkt und damit, da X Hilbertraum ist, auch $\mathcal{R}$-beschränkt. Man wählt in Satz 2.28 $\mathcal{T} := \{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : |A| \le C_0\}$ und erhält die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$. □

c) Störungssätze für $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

Um Operatoren mit nichtkonstanten Koeffizienten behandeln zu können, benötigen wir noch Störungsresultate für $\mathcal{R}$-Beschränktheit. Dazu definieren wir für einen $\mathcal{R}$-sektoriellen Operator A mit Winkel φ und für $\theta < \varphi$ die Größen

$$\begin{aligned} M_\theta(A) &:= \sup\big(\{\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big), \\ \widetilde{M}_\theta(A) &:= \sup\big(\{\|A(\lambda-A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big). R_\theta(A) \quad := \mathcal{R}\big(\{\lambda(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big), \\ \widetilde{R}_\theta(A) &:= \mathcal{R}\big(\{A(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big). \end{aligned}$$

Man beachte, dass auch $\widetilde{M}_\theta(A)$ endlich ist wegen $A(\lambda-A)^{-1} = \lambda(\lambda-A)^{-1} - 1$. Analog für $\widetilde{R}_\theta(A)$.

2.30 Satz. *Sei X ein Banachraum und A ein $\mathcal{R}$-sektorieller Operator in X mit Winkel $\varphi_\mathcal{R}(A) > 0$, und sei $\theta \in (0, \varphi_\mathcal{R}(A))$. Sei B ein linearer Operator in X mit $D(B) \supset D(A)$ und*

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| \quad (x \in D(A)).$$

Falls $a < \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)}$, so ist $A+B$ wieder $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel größer gleich θ und

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \overline{\Sigma_\theta} \setminus \{0\}$ gilt

$$\|B(\lambda-A)^{-1}x\| \le a\|A(\lambda-A)^{-1}x\| \le a\widetilde{M}_\theta(A)\|x\| \quad (x \in X).$$

Wegen $a < \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)}$ ist also $1 + B(\lambda-A)^{-1}$ invertierbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} (\lambda-(A+B))^{-1} &= (\lambda-A)^{-1}\big[1 + B(\lambda-A)^{-1}\big]^{-1} \\ &= (\lambda-A)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-B(\lambda-A)^{-1})^n. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\rho(A+B) \supset \Sigma_\theta$. Nach Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und nach Voraussetzung folgt

$$\mathcal{R}(\{B(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}) \le a\mathcal{R}(\{A(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}) = a\widetilde{R}_\theta(A).$$

Setzt man dies in die Reihe ein, erhält man

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

Dies zeigt auch, dass $A+B$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ ist. □

Das nächste Störungsresultat lässt noch einen zusätzlichen Term $\|x\|$ auf der rechten Seite zu. Allerdings erkauft man sich hier die $\mathcal{R}$-Sektorialität mit einer Verschiebung des Operators.

2.31 Satz. *Sei A $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A) > 0$, und sei $\theta < \varphi_{\mathcal{R}}(A)$. Sei B ein linearer Operator mit $D(B) \supset D(A)$ und*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A))$$

mit zwei Konstanten $b \geq 0$ und $0 \leq a < \big[\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)\big]^{-1}$. Dann ist $A + B - \mu$ $\mathcal{R}$-sektoriell für

$$\mu > \frac{bM_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}{1 - a\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}$$

mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A + B - \mu) \geq \theta$.

Beweis. Für $\mu > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\|B(A-\mu)^{-1}x\| &\leq a\|A(A-\mu)^{-1}x\| + b\|(A-\mu)^{-1}x\| \\ &\leq \big(a\widetilde{M}_\theta(A) + \frac{b}{\mu}M_\theta(A)\big)\|x\| \quad (x \in X).\end{aligned}$$

Damit erfüllt B die Voraussetzung von Satz 2.30 mit $A - \mu$ anstelle von A. Dabei war die Bedingung an die Konstante in Satz 2.30 gegeben durch $c(\mu)\widetilde{R}_\theta(A) < 1$ für $c := a\widetilde{M}_\theta(A) + \frac{b}{\mu}M_\theta(A)$. Wegen $a\widetilde{M}_\theta(A) < 1$ ist dies der Fall für

$$\mu > \frac{bM_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}{1 - a\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

□

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[5] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups.* Academic Press London etc., 1980.

[6] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.

[7] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[8] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I.* Birkhäuser, Basel etc., 1990.

[9] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators*, I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.

[10] Kunstmann, P., Weis, L.: Maximal L_p-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞-functional calculus. *Lect. Notes Math.* **1855**, 65-312 (2004).

[11] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[12] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York etc., 1992.

[13] Tanabe, H.: *Equations of evolution.* Pitman, London etc., 1979.

[14] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag Stuttgart 1982.

Index