# Tag der Mathematik 2010

Gruppenwettbewerb

Einzelwettbewerb

Mathematische Hürden

# Lösungen

**Allgemeine Hinweise:**

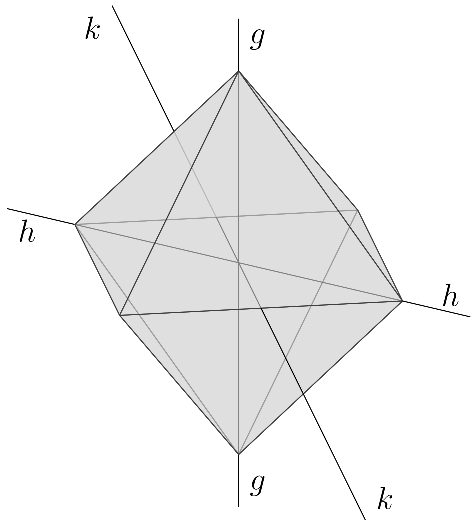
Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.

Taschenrechner sind nicht zugelassen.

**Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!**

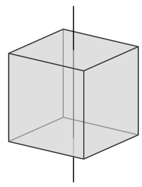
# Aufgabe G1 (8 Punkte)

Die Achse eines Körpers ist eine Gerade, um die man den Körper dreht, so dass er auf sich selbst abgebildet wird. Für den Drehwinkel $\alpha$ gilt $0° < \alpha < 360°$.
In der Abbildung sind 3 Achsen $g$, $h$ und $k$ eines Oktaeders eingezeichnet. Um $g$ und $h$ sind 90°-, 180°- und 270°-Drehungen möglich, um $k$ ist es nur eine 180°-Drehung. Man sagt $g$ und $h$ sind gleichartig, während $k$ verschieden von $g$ und $h$ ist.
Ein Würfel hat 13 Achsen, die von drei verschiedenen Arten sind. Beschreiben Sie diese Achsen und bestimmen Sie die möglichen Drehwinkel.

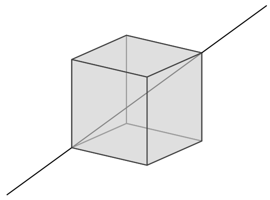



## Lösung:

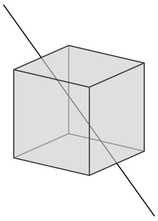
Es gibt 3 Achsen durch die Mitten gegenüberliegender Flächen.
Drehwinkel: 90°, 180° und 270°.



Es gibt 4 Achsen durch gegenüberliegende Ecken (längs der 4 Raumdiagonalen).
Drehwinkel: 120° und 240°.

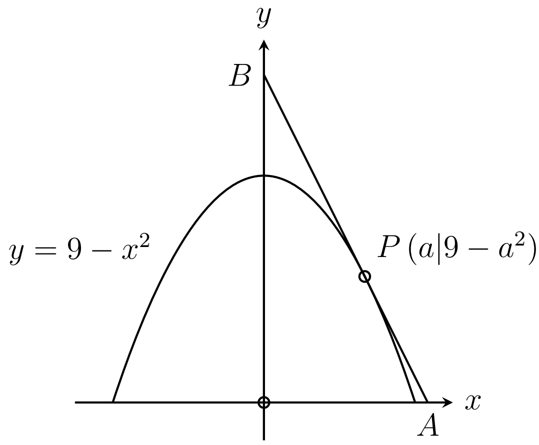


Es gibt 6 Achsen durch die Mitten gegenüberliegender Kanten.
Drehwinkel: 180°.



# Aufgabe G2 (8 Punkte)

Sei $P$ ein Punkt der Parabel $y = 9 - x^2$
im 1. Quadranten.
Die Tangente in $P$ schneidet die Achsen in $A$ und $B$.
Sei $d$ der Abstand von $A$ und $B$.
Wie muss $P\,(a|9-a^2)$ gewählt werden,
damit $d^2$ minimal wird?




## Lösung:

Die Tangente in $P$ hat die Gleichung

$$y - \left(9 - a^2\right) = -2a\,(x - a)$$

und schneidet die Achsen in $A\left(\frac{a^2+9}{2a}\middle|\,a\right)$ und $B\,(0|a^2+9)$.

Also ist $d^2 = \dfrac{\left(a^2+9\right)^2}{4a^2} + \left(a^2+9\right)^2 = \left(a^2+9\right)^2\left(\dfrac{1}{4a^2}+1\right)$.

Die Ableitung von $d^2$ ist

$$\left(a^2+9\right)\left(8a^4+a^2-9\right)\cdot\frac{1}{2a^3} = \frac{a^2+9}{2a^3}\left(8a^2+9\right)\left(a^2-1\right)$$

Also ist $a = 1$ und $P\,(1|8)$.

# Aufgabe G3 (8 Punkte)

Bei einem Glücksspiel beträgt der Einsatz 2 €.
Es werden zwei faire Würfel geworfen.
Bei gleicher Augenzahl erhält der Spieler 5 €.
Ist die Differenz der Augenzahlen 5, werden 10 € ausgezahlt.
Bei einer Augendifferenz von 1 erhält man den Einsatz zurück.

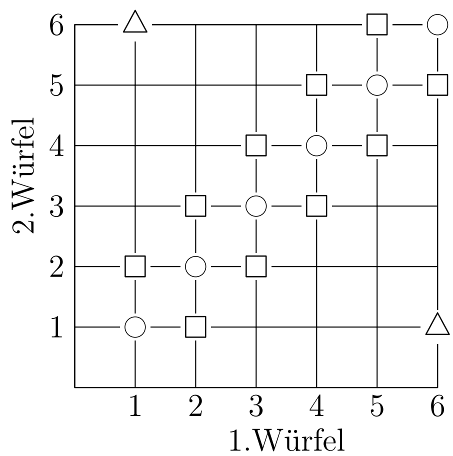
a) Wie groß ist der durchschnittliche Gewinn (bzw. Verlust)?

b) Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair, d.h. der durchschnittliche Gewinn 0?

## Lösung:

a) Aus der Tabelle ergibt sich folgende Verteilung der Wahrscheinlichkeit:

| Ereignis | ○ | □ | △ | |
|---|---|---|---|---|
| Differenz | 0 | 1 | 5 | 2, 3, 4 |
| Wahrsch. | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{18}{36}$ |




Durchschnittlicher Gewinn (bzw. Verlust):

$$\frac{6}{36}(5-2)+\frac{10}{36}(2-2)+\frac{2}{36}(10-2)-\frac{18}{36}\cdot 2=-\frac{1}{18}$$

(Bei 18 Spielen verliert man durchschnittlich 1 €.)

b) Der Einsatz sei x €.
Aus $\frac{6}{36}(5-x)+\frac{10}{36}(x-x)+\frac{2}{36}(10-x)-\frac{18}{36}x=0$ folgt $x=\frac{25}{13}$.

Der Einsatz müsste $\frac{25}{13}$ € $\approx 1{,}92$ € betragen.

Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · E-Mail: rolf.nothnagel@z-f-m.de

# Aufgabe G4 (8 Punkte)

Die Multiplikation von zwei Paaren reeller Zahlen wird definiert durch

$$(a, b) * (c, d) := (ac + bd, ad + bc)\,.$$

a) Berechnen Sie $(1, -2) * (0, 1)$ und $(-4, 4) * (3, 3)$.

b) Wie muss $(x, y)$ gewählt werden, damit für alle $(a, b)$ mit $a^2 \neq b^2$

(i) $(a, b) * (x, y) = (a, b)$ gilt?

(ii) $(a, b) * (x, y) = (1, 0)$ gilt?

## Lösung:

a)

$$\begin{aligned}(1, -2) * (0, 1) &= (1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1, 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0) = (-2, 1)\\ (-4, 4) * (3, 3) &= ((-4) \cdot 3 + 4 \cdot 3, (-4) \cdot 3 + 4 \cdot 3) = (0, 0)\end{aligned}$$

b) (i)

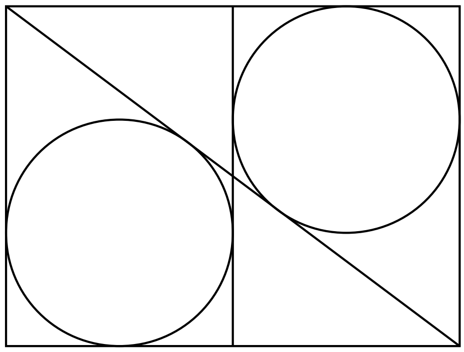
Aus $ax + by = a$
und $bx + ay = b$
folgt $x = 1$ und $y = 0$ .

(ii)

Aus $ax + by = 1$
und $bx + ay = 0$
folgt $x = \dfrac{a}{a^2 - b^2}$ und $y = \dfrac{-b}{a^2 - b^2}$ .

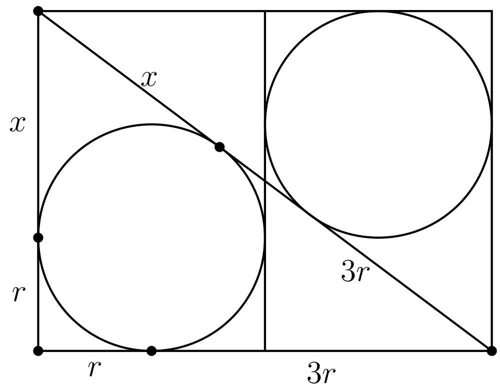
# Aufgabe E1 (8 Punkte)

Wie groß sind Länge und Breite des Rechtecks, falls beide Kreise den selben Radius $r$ haben?



## Lösung:

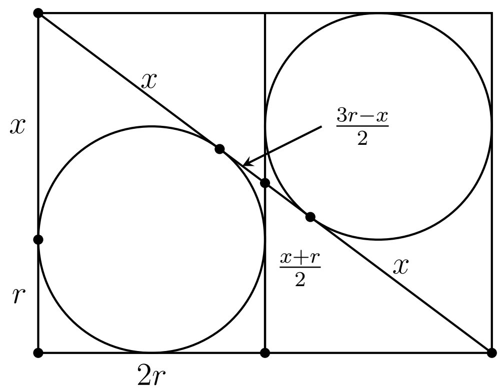
Die Länge des Rechtecks ist $4r$.
Für den Beweis, dass die Breite $3r$ ist, gibt es mehrere Möglichkeiten, die $x = 2r$ zeigen:




(i) Pythagoras:
Aus $(x+r)^2 + (4r)^2 = (x+3r)^2$ folgt $x = 2r$.

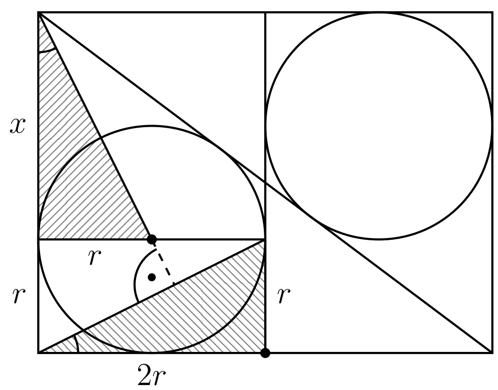
(ii) Tangentenviereck:

Aus $(x+r) + \frac{x+r}{2} = 2r + x + \frac{3r-x}{2}$ folgt $x = 2r$.




(iii) Kongruenz:

Die schraffierten Dreiecke sind kongruent, also $x = 2r$.



# Aufgabe E2 (8 Punkte)

Ein Mathematiker berichtet im Freundeskreis, dass im Jahr 2010 sowohl seine jüngere als auch seine ältere Tochter so alt sein werden wie die Quersumme ihrer Geburtsjahre (als vierstellige Zahl).

In welchen Jahren wurden die Töchter geboren?

## Lösung:

Das Geburtsjahr der jüngeren Tochter sei $200a$.
Aus $2+0+0+a = 2010 - 200a$ folgt $a = 4$, also ist sie 2004 geboren.

Das Geburtsjahr der älteren Tochter sei 19ab.
Aus $1+9+a+b = 2010 - 19ab$ folgt $11a + 2b = 100$.
Wegen $b \leq 9$ ist $a \geq 8$.
Da $a$ gerade sein muss, folgt $a = 8$ und $b = 6$, also ist die ältere Tochter 1986 geboren.

# Aufgabe E3 (8 Punkte)

Für jede reelle Zahl $z$ sei $[z]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $z$, zum Beispiel $[0,9] = 0$, $[2] = 2$, $[-1,4] = -2$.

Zeichnen Sie im Koordinatensystem alle Punkte $(x|y)$, für die $[x]^2 + [y]^2 = 4$.

## Lösung:

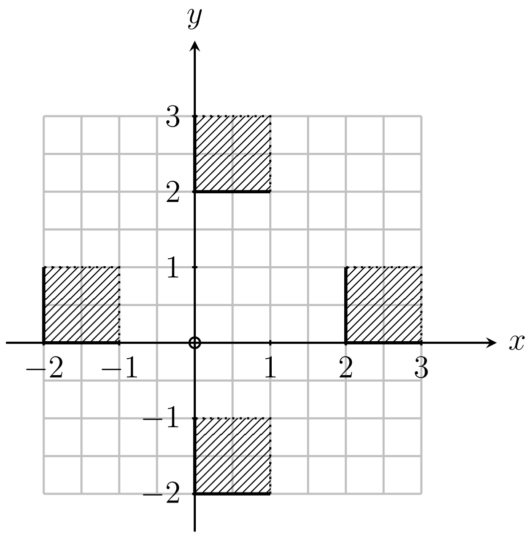
Da $[x]$ und $[y]$ ganze Zahlen sind, gibt es folgende vier Möglichkeiten:

(i) $[x] = 2$, $[y] = 0$, also $2 \leq x < 3$, $0 \leq y < 1$

(ii) $[x] = -2$, $[y] = 0$, also $-2 \leq x < -1$, $0 \leq y < 1$

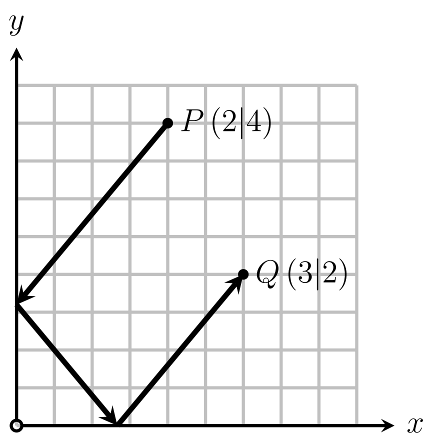
(iii) $[x] = 0$, $[y] = 2$, also $0 \leq x < 1$, $2 \leq y < 3$

(iv) $[x] = 0$, $[y] = -2$, also $0 \leq x < 1$, $-2 \leq y < -1$



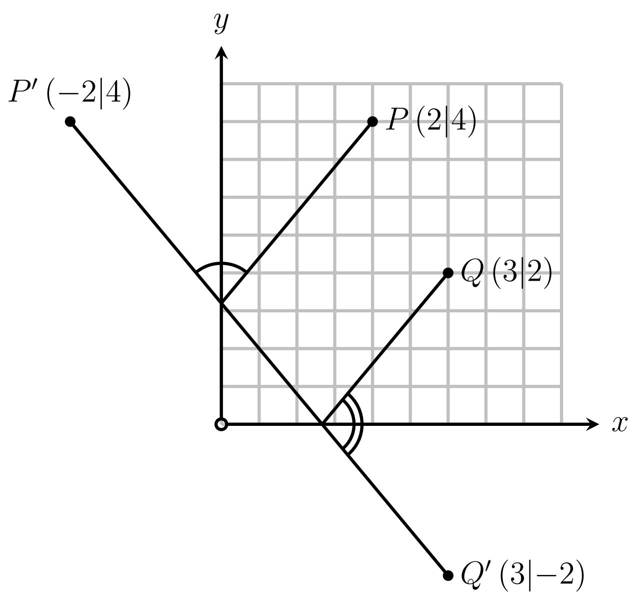
# Aufgabe H1 (3 Punkte)

Ein von $P\,(2|4)$ ausgehender Lichtstrahl wird zuerst an der $y$-Achse und dann an der $x$-Achse nach $Q\,(3|2)$ reflektiert.
Wie lang ist der Weg, den das Licht dabei zurücklegt?




## Lösung:

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.
Also ist der Weg des Lichts die Entfernung von $P'\,(-2|4)$ und $Q'\,(3|-2)$, also $\sqrt{(4+2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{61}$.

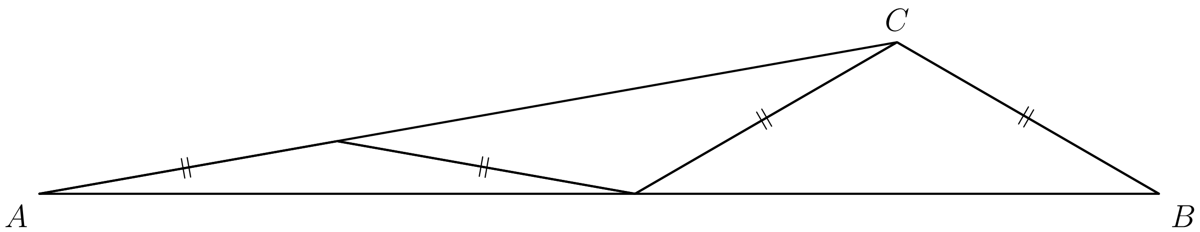



Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · E-Mail: rolf.nothnagel@z-f-m.de

# Aufgabe H2 (3 Punkte)

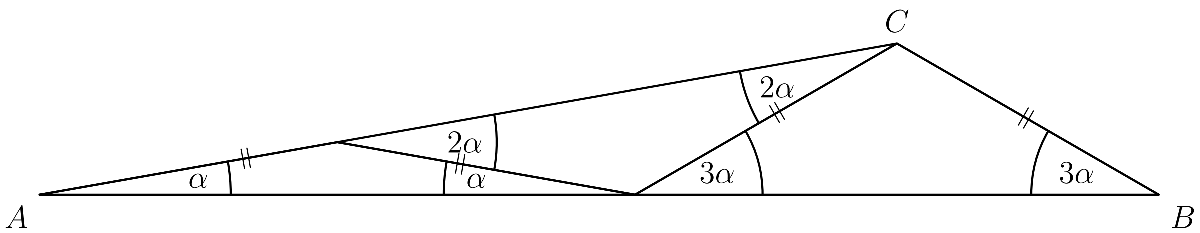
Im $\triangle ABC$ ist $\sphericalangle ACB = 140\,^\circ$ und die gekennzeicheten Seiten gleich lang.

Berechnen Sie $\sphericalangle BAC$.




## Lösung:

Mit $\alpha := \sphericalangle BAC$ gilt $140\,^\circ + \alpha + 3\alpha = 180\,^\circ$,
also $\alpha = 10\,^\circ$.



# Aufgabe H3 (3 Punkte)

Es sei $f(x) = \dfrac{2x}{3x+4}$, $x \neq -\frac{4}{3}$.

Wie muss $g(x)$ gewählt werden, damit $f(g(x)) = x$ für alle $x \neq \frac{2}{3}$ gilt?

## Lösung:

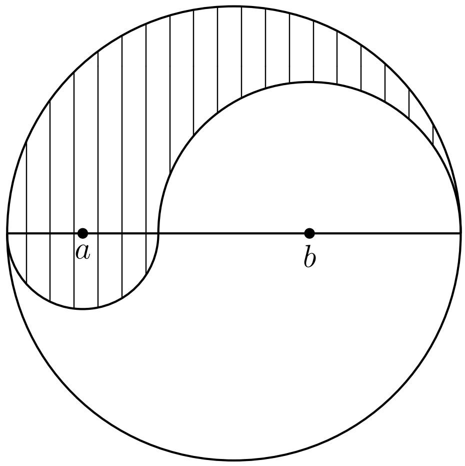
Aus $\dfrac{2g(x)}{3g(x)+4} = x$ folgt $g(x) = \dfrac{4x}{2-3x}$.

Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · E-Mail: rolf.nothnagel@z-f-m.de

# Aufgabe H4 (3 Punkte)

Drei Halbkreise mit den Durchmessern $a$, $b$ und $a+b$ begrenzen das in der Abbildung schraffierte Gebiet.

Berechnen Sie die Fläche in Abhängigkeit von $a$ und $b$.




## Lösung:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}a\,(a+b)$$

# Aufgabe H5 (3 Punkte)

Für welche $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt $a + b = a \cdot b = a^2 - b^2$ ?

## Lösung:

Wegen $a + b \neq 0$ und $a + b = a^2 - b^2$ gilt $a - b = 1$.
Eingesetzt in $a + b = a \cdot b$ folgt:

$$a^2 - 3a + 1 = 0 \text{ und } b^2 - b - 1 = 0\ .$$

Hieraus folgt

$$a = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right) \text{ und } b = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\ .$$

(Es gilt $a + b = a \cdot b = a^2 - b^2 = 2 \pm \sqrt{5}$).

# Aufgabe H6 (3 Punkte)

Die Seitenflächen eines Quaders sind $18\,\mathrm{cm}^2$, $40\,\mathrm{cm}^2$ und $80\,\mathrm{cm}^2$.

Wie groß ist sein Volumen?

## Lösung:

Sind $a$, $b$ und $c$ die Kantenlängen des Quaders, so gilt $ab = 18$, $bc = 80$ und $ac = 40$.

Multiplikation der drei Gleichungen ergibt $a^2b^2c^2 = 57600$,
also ist das Volumen $\sqrt{57600} = 240\,[cm^3]$.

# Aufgabe H7 (3 Punkte)

In der Gleichung $(D \cdot R \cdot E \cdot I) \cdot (V \cdot I \cdot E \cdot R) = Z \cdot W \cdot O \cdot E \cdot L \cdot F$ steht jeder Buchstabe für eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 9$; und zwar bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen.

Bestimmen Sie das Produkt $Z \cdot W \cdot E \cdot I$.

## Lösung:

Es treten 10 verschiedene Buchstaben auf, also muss einer der Buchstaben Null sein. Da nur $E$ auf beiden Seiten vorkommt, ist $E = 0$ und folglich $Z \cdot W \cdot E \cdot I = 0$.

# Aufgabe H8 (3 Punkte)

Ein Quadrat mit der Seite 6 bedeckt die Fläche eines Dreiecks maximal zu 60 %. Legt man das Dreieck auf das Quadrat, dann werden maximal zwei Drittel der Fläche des Quadrates bedeckt.

Welchen Flächeninhalt $F$ hat das Dreieck?

## Lösung:

Bedecken zwei Flächen einander teilweise, so ist der Flächeninhalt des bedeckenden Teils so groß wie der Flächeninhalt des bedeckten Teils. Ist die eine Fläche maximal bedeckt, dann auch die andere.

Aus $\frac{60}{100}F = \frac{2}{3} \cdot 36$ folgt $F = 40$.