



## Proseminar zur Analysis

### 1. Inhalt des Proseminars

Im Proseminar werden verschiedene Themen aus der Analysis behandelt. Im wesentlichen geht es dabei um vier Themenkomplexe, die auch miteinander zusammenhängen:

- Fourier-Transformation,
- gewöhnliche Differentialgleichungen,
- orthogonale Polynome,
- Themen aus der Signalverarbeitung.

Bei der Fourier-Transformation werden sowohl Fourierreihen als auch Fourier-Integrale behandelt, wobei die Fourierreihen hier nur kurz auftauchen, da sie im wesentlichen auch schon in der Analysis-Vorlesung besprochen wurden. Die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen ergeben bei bestimmten Typen von Differentialgleichungen sogenannte orthogonale Funktionensysteme, von denen wiederum die Exponentialfunktionen ein Beispiel sind. Damit ist die Tür zu verallgemeinerten Fourier-Entwicklungen geöffnet. Diese werden im Proseminar nur kurz besprochen, hingegen werden spezielle Funktionen, die sich als Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen definieren lassen, etwas ausführlicher besprochen werden.

Die Theorie der Fourier-Reihen und der gewöhnlichen Differentialgleichungen treffen sich, wenn es um Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten geht.

Eine typische Anwendung der Fourier-Transformation ist die Signalverarbeitung. Hier werden wesentliche Eigenschaften anhand des Spektrums der Funktionen / Signale sichtbar. Dieses Spektrum, das den Ingenieuren in der Kommunikationstheorie sehr vertraut ist, ist nichts anderes als unsere Fourier-Transformation. Die Beschreibung über das Spektrum legt die Grundlage z.B. für die Filtertheorie, die selbst ein großes Gebiet ist, bei uns aber nicht behandelt werden kann.

## 2. Zum Ablauf des Proseminars

Der Vortrag sollte sich auf die jeweils angegebenen Quellen stützen, aber eigenständig formuliert sein. Neben dem eigentlichen Vortrag soll auch noch eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags angefertigt und allen Teilnehmern ausgehändigt werden.

Bei Fragen und Unklarheiten kann sich jeder gern an mich wenden. Ich bin telefonisch erreichbar unter der Nummer (07531) 88-2577, per email unter

`robert.denk@uni-konstanz.de`

Folgende Vorträge sind geplant.

1.	Stefan Peraus	Der Satz von Riesz-Fischer, Teil 1
2.	Johannes Hyneck	Der Satz von Riesz-Fischer, Teil 2
3.	Michael Heller	Fourierreihen stetiger Funktionen
4.	Jörg Strecker	Fourierkoeffizienten von $L^1$ -Funktionen
5.	Florian Gauland	Der Umkehrsatz der Fourier-Transformation
6.	Frank Hemzelmann	Der Satz von Plancherel
7.	Urs Günthör	Die Banachalgebra $L^1$
8.	Heike Manz	Orthogonale Polynome: Definition und erste Eigenschaften
9.	Joachim Müller	Rekursionsformeln für orthogonale Polynome
10.	Stefanie Beth	Nullstellen orthogonaler Polynome
11.	Nicole Bretschneider	Reihenentwicklungen bei Differentialgleichungen
12.	Kim Essig	Differentialgleichungen in der Chemie
13.	Tanja Edel	Periodische Differentialgleichungen
14.	Silvia Beyrle	Der Abtastsatz für bandbegrenzte Signale
15.	Judith Drey	Zeitdiskrete Signale

## 3. Literatur

Es gibt viele Bücher über die oben angesprochenen Themen. Wir werden im wesentlichen die folgenden Quellen heranziehen:

- [B] M. Braun: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer-Verlag Berlin etc., 3. Auflage 1994.
- [C] T. S. Chihara: An introduction to orthogonal polynomials. Gordon and Breach 1978.
- [D] J. Duoandikoetxea: Fourier Analysis. Amer. Math. Soc. 2001.
- [F] O. Forster: Analysis 2. Vieweg-Verlag Braunschweig, 5. Auflage 1984.
- [H] H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Teubner Stuttgart 1989.

- [H] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2. Teubner Stuttgart, 6. Auflage 1991.
- [K] K. Königsberger: Analysis I. Springer-Verlag Berlin etc., 1990.
- [KK] K. D. Kammeyer, K. Kroschel: Digitale Signalverarbeitung. Teubner 1989.
- [L] H. D. Lüke: Signalübertragung. Springer-Verlag 1985.
- [N] F. Natterer: The mathematics of computerized tomography. Wiley / Teubner 1986.
- [R] W. Rudin: Reelle und komplexe Analysis. Oldenburg Verlag 1999.

Nun folgen kurze Angaben zu den einzelnen Vorträgen:

- 1. Vortrag.** Quelle: [R], S. 91-102 bis einschließlich Satz 4.17 inklusive Beweis. Sie können im wesentlichen nach der Darstellung im Buch vorgehen.
- 2. Vortrag.** Quelle: [R], S. 102-110, ab Satz 4.18. Die Darstellung kann ähnlich wie im Buch sein. Es müssen gewisse Teile vom ersten Vortrag bekannt sein, daher sollten Sie sich auch diesen Vortrag kurz durchlesen.
- 3. Vortrag.** Quelle: [R], S. 115-124. Das eigentliche Thema ist der Abschnitt 5.11-5.13 auf S. 121-124. Sie brauchen aber auch noch einige Sätze aus den Seiten vorher. Von diesen Seiten sollten Sie nur durcharbeiten, was Sie wirklich später brauchen.
- 4. Vortrag.** Quelle: [R], S. 124-126, [D], p. 8-10. Von [R] brauchen Sie noch ein paar Begriffe aus den Seiten vorher. In [D] geht es um Lemma 1.8 und Theorem 1.10. Das anschließende Corollary 1.11 brauchen wir nicht mehr.
- 5. Vortrag.** Quelle: [R], S. 213-221. Sie können der Darstellung im Buch im wesentlichen folgen. Die zentralen Ergebnisse sind Satz 9.11 und die Folgerung 9.12 daraus.
- 6. Vortrag.** Quelle: [R], S. 221-227. Hier geht es nicht nur um den Satz von Plancherel selbst, sondern auch um translationsinvariante Unterräume des  $L^2$ . Sie werden ein paar Ergebnisse von den Seiten vorher benötigen.
- 7. Vortrag.** Quelle: [R], S. 227-230. Sie können im wesentlichen der Darstellung im Buch folgen.
- 8. Vortrag.** Quelle: [C], p. 6-17. Hier liegt der Schwerpunkt auf Abschnitt 2. Inwieweit Abschnitt 3 noch behandelt werden kann, sehen wir dann im Lauf der Vorbereitungen.
- 9. Vortrag.** Quelle: [C], p. 18-24. Sie können sich an der Darstellung im Buch orientieren.
- 10. Vortrag.** Quelle: [C], 26-34. Die Darstellung im Buch kann im wesentlichen übernommen werden, allerdings werden Sie ein paar Begriffe aus den vorherigen Seiten brauchen.
- 11. Vortrag.** Quelle: [B], S. 216-227, [H], S. 260-274. Den Satz [H], S. 260 sollten Sie ohne Beweis anführen. Dann könnten Sie etwa das Beispiel [B], S. 216 machen. Kompliziertere

Beispiele in [B] sind wahrscheinlich zu lang zum Vorrechnen, aber interessant wären etwa die Hermitesche Dgl. [H], S. 262, speziell die Hermiteschen Polynome.

**12. Vortrag.** Quelle: [H], S. 114-116; Aufg. 8.17 (S. 107), S. 595, S. 575. Sie sollten zuerst Aufg. 8.17 lösen und die Lösung in der Form von [H], S. 595 angeben. Dann können Sie im wesentlichen wie auf S. 114-116 vorgehen.

**13. Vortrag.** Quelle: [H], S. 314-321, S. 605. Eine Zahl  $r$  heißt *Floquet-Exponent* oder *charakteristischer Exponent*, falls es eine Lösung  $y(t)$  der Dgl. gibt mit  $y(t + \omega) = e^{r\omega}y(t)$ . Die Zahl  $s := e^{r\omega}$  heißt dann *Floquet-Multiplikator*. Im gesamten Vortrag sollten Sie voraussetzen, daß (in der Bezeichnung von [H])  $s_1 \neq s_2$  gilt. Schließlich sollten Sie nachweisen, daß die Nullstellen von  $\det(A - sI_2)$  nicht von der Wahl von  $y_1$  und  $y_2$  abhängt, siehe [H], Aufg. 1, S. 321 und die Lösung auf S. 605.

**14. Vortrag.** Quelle: [KK], S. 20-25, [N], p. 54-56. Thema ist der Abtastatz für bandbegrenzte Signale. Eine eher anschauliche Darstellung findet sich in [KK], ein mathematischer (aber sehr knapp formulierter) Beweis in [N].

**15. Vortrag.** Quelle: [KK], S. 9-36. In diesem Vortrag geht es mehr um einen einführenden Überblick über Begriffe der Signalverarbeitung. Abschnitt 2.4 ist bereits Thema des 14. Vortrags und braucht hier nicht mehr behandelt zu werden.