GROUPES ABELIENS DIVISIBLES ORDONNES

Salma Kuhlmann

Introduction et note bibliographique.

L'exposé est divisé en 5 sections:
Dans la section 1 sont établies les notations et définitions, notamment celle du squelette d'un groupe ordonné.
Dans la section 2, nous donnons une preuve détaillée du théorème **A** qui est un premier théorème de plongement, et quelques exemples montrant que l'hypothèse de divisibilité du groupe y est indispensable.
La section 3 donne l'énoncé du théorème **B** qui est le théorème de plongement de Hahn ainsi que quelques théorèmes concernant les groupes valués. Les démonstrations peuvent être lues dans [FU] par exemple.
La section 4 est un rapide exposé des principaux résultats de [ROS], notamment celui qui établit une relation entre le rang d'un groupe ordonné et le type d'ordre d'un certain ensemble d'indiscernables.
Finalement, nous démontrons dans la section 5 le théorème **C** qui est un théorème de caractérisation des GADO κ-saturés pour $\kappa \geq \aleph_0$. L'article de Alling [ALL] contient déjà un théorème de caractérisation des GADO qui sont des ensembles η_α pour $\alpha > 0$; au vu du théorème 5.2, son résultat peut être vu comme une caractérisation des groupes abéliens divisibles ordonnés (GADO) κ-saturés pour $\kappa > \aleph_0$, et alors le théorème **C** en serait une généralisation au cas $\kappa \geq \aleph_0$. La preuve que nous en donnons s'appuie sur une communication personnelle qui nous a été faite par Peter Schmitt à Heidelberg. Nous terminons par quelques corollaires intéressants en ce qu'ils donnent des exemples concrets de tels GADO.

§1 Préliminaires, notations, définitions.

La théorie des groupes abéliens ordonnés (GAO) est formulée dans le langage $L = \{+, -, 0, <\}$. Elle a les axiomes suivants:

- les axiomes de groupe abélien,
- les axiomes exprimant que $<$ est un ordre total,
- $x < y \to x + z < y + z$ (l'ordre est compatible avec l'addition);

celle des groupes abéliens divisibles ordonnés (GADO) a de plus

- $\exists x (x \neq 0)$,
- le schéma $\exists y (ny = x)$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

Noter qu'un GADO est un espace vectoriel ordonné sur $\mathbb{Q}$.

Définitions 1.1
Soit G un GADO et $g_1, g_2 \in G$; posons $|g| = \max(g, -g)$ pour $g \in G$.
On dit que g_1 est <u>équivalent</u> à g_2, on écrit $g_1 \sim g_2$, ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n|g_1| > |g_2|$ et $n|g_2| > |g_1|$.
On dit que g_1 est <u>infiniment plus petit</u> que g_2, on écrit $g_1 \ll g_2$, ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n|g_1| < |g_2|$.
On remarque les propriétés suivantes:

$$\begin{array}{lcl}
a \ll b \text{ et } a \sim c & \Rightarrow & c \ll b, \\
a \ll b \text{ et } b \sim d & \Rightarrow & a \ll d, \\
a \ll b \text{ et } b \ll c & \Rightarrow & a \ll c,
\end{array}$$

et $\sim$ est une relation d'équivalence.
Un sous groupe $C \subseteq G$ est convexe ssi étant donné $c_1, c_2 \in C$ et $c \in G$ t.q. $c_1 \leq c \leq c_2$ alors $c \in C$.
Soit $\Sigma(G)$ l'ensemble de tous les sous groupes convexes de G, alors $\Sigma(G)$, ordonné par l'inclusion, est une chaîne contenant 0 et G et close par unions et intersections.
Si $C, D \in \Sigma(G)$ sont t.q. $D \subset C$, et pour tout $D' \in \Sigma(G)$, $D \subseteq D' \subseteq C \Rightarrow D' = D$ ou $D' = C$, alors on écrit $D \!-\!\!\!< C$.
Si $g \in G$, on définit:
$C_g = \bigcap\{C \,;\, C \in \Sigma(G)$ t.q. $g \in C\}$ = le plus petit élément de $\Sigma(G)$ contenant g,
$D_g = \bigcup\{D \,;\, D \in \Sigma(G)$ t.q. $g \notin D\}$ = le plus grand élément de $\Sigma(G)$ ne contenant pas g,
et $D_0 = \emptyset$ par convention. Les C_g sont appelés les sous groupes convexes principaux de G.

Remarques 1.2

$D_g \!-\!\!\!< C_g$.
$D_g = \{g' \in G \,;\, g' \ll g\}$.
$g_1 \sim g_2$ ssi $C_{g_1} = C_{g_2}$ ssi $D_{g_1} = D_{g_2}$.
$C_g = D_g \dot\cup (C_g \setminus D_g) = \{g' \in G \,;\, g' \ll g\} \dot\cup \{g'' \in G \,;\, g'' \sim g\}$.
$g_1 \ll g_2$ ssi $C_{g_1} \subsetneqq C_{g_2}$ ssi $D_{g_1} \subsetneqq D_{g_2}$.

Définitions 1.3

G est archimédien ssi pour tout $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ on a $g_1 \sim g_2$. (On remarque que G est archimédien ssi $\Sigma(G) = \{0, G\}$). Si on pose $B_g = C_g / D_g$ pour $g \neq 0$, alors B_g est archimédien. B_g est la composante archimédienne de G correspondant à g.
Le rang de G est par définition le type d'ordre d'une des chaînes suivantes:
la chaîne $C_G = \{C_g \,;\, g \neq 0\}$ des sous groupes convexes principaux non nuls, ordonnée par: $C_{g_1} < C_{g_2}$ ssi $C_{g_1} \supset C_{g_2}$;
la chaîne $D_G = \{D_g \,;\, g \neq 0\}$ ordonnée comme dans le cas précédent;
la chaîne $E_G = \{[g] \,;\, g \neq 0\}$ des classes d'équivalence des éléments non nuls de G modulo $\sim$, ordonnée par: $[g_1] < [g_2]$ ssi $g_2 \ll g_1$.
(Par les propriétés mentionnées dans 1.1 et 1.2, ces 3 ordres sont bien définis, totaux et définissent des chaînes isomorphes.)
Le rang de G est noté I_G, on l'identifiera souvent avec l'une ou l'autre des 3 chaînes.
Pour chaque $i \in I_G$ soit $g_i \in G$, $g_i > 0$ t.q. $[g_i] = i$ et soit $B_i = B_{g_i}$; notons que B_i ne dépend que de i. Le squelette de G est $[I_G \,;\, B_i, i \in I_G]$. (Rigoureusement, on considère le type d'isomorphisme de B_i en tant que groupe ordonné.) Ainsi G et G' de squelettes

$$[I_G \,;\, B_i, i \in I_G] \text{ et } [I_{G'} \,;\, B'_i, i \in I_{G'}]$$

(respectivement) ont même squelette ssi il existe ϕ et pour chaque $i \in I_G$ il existe ϕ_i t.q.
$\phi \;:\; I_G \longrightarrow I_{G'}$ est un isomorphisme de chaînes;
$\phi_i \;:\; B_i \longrightarrow B'_{\phi(i)}$ est un isomorphisme de groupes ordonnés, pour chaque $i \in I_G$.
Le squelette est un invariant: si G et G' sont isomorphes, ils ont même squelette. Si $G \subseteq G'$, il existe des plongements canoniques Id de I_G dans $I_{G'}$, et Id_i de B_i dans $B'_{Id(i)}$, pour chaque $i \in I_G$.

Proposition 1.4

Etant donné une chaîne I et un choix $\{B_i \,;\, i \in I\}$ de groupes archimédiens, il existe un GAO G de squelette $[I \,;\, B_i, i \in I]$.

Preuve:

Soit $G = \Gamma_{i \in I} B_i$, i.e. $G = \{f \,;\, f$ est une fonction, $f : I \longrightarrow \cup B_i$ t.q. $f(i) \in B_i$ et le support de f est bien ordonné$\}$.

L'ordre sur G est défini par: $f > 0$ ssi $f(i_0) > 0$, où i_0 est le plus petit élément du support de f, c'est l'ordre lexicographique. L'addition dans G se fait coordonnée par coordonnée. ◇

Exemple 1.5

Soit I une chaîne, $\mathbb{R}$ les réels. On considère

$$G = \Gamma_{i \in I} \mathbb{R} = \mathbb{R}^I = \{f \,;\, f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ le support de f est bien ordonné}\}.$$

Soit $H \subseteq G$ donné par: $H = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R} = \{f \,;\, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, le support de f est fini$\}$.
Pour $f, g \in G$ on a:

$$\begin{aligned} f \sim g &\text{ ssi } \min(\text{support } f) = \min(\text{support } g), \\ f \ll g &\text{ ssi } \min(\text{support } f) > \min(\text{support } g). \end{aligned}$$

Pour chaque $i \in I$, définissons $f_i \in G$ par:

$$\begin{aligned} f_i(i) &= 1, \\ f_i(j) &= 0 \text{ si } i \neq j. \end{aligned}$$

Alors $\{f_i \,;\, i \in I\}$ est un ensemble complet de représentants des classes de $\sim$ dans G (de même dans H), donc $I_G = I$ car $[f_i] < [f_j]$ ssi $f_j \ll f_i$ ssi $i < j$ (de même pour H).
Si $f \in G$ alors

$$\begin{aligned} C_f &= \{g \in G \,;\, \min(\text{support } g) \geq \min(\text{support } f)\}, \\ D_f &= \{g \in G \,;\, \min(\text{support } g) > \min(\text{support } f)\}. \end{aligned}$$

(Similairement pour H.)
Si $\phi : C_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par: $\phi(g) = g(i_0)$ où $i_0 = \min(\text{support } f)$, alors ϕ est un homomorphisme de noyau D_f et est surjectif, donc

$$B_f = C_f / D_f \simeq \mathbb{R}.$$

On voit ainsi que

$$\text{squelette} G = \text{squelette} H = [I \,;\, B_i = \mathbb{R}, i \in I].$$

§2. Le premier théorème de plongement.

Les quotients:

Lemme 2.1

Soit G un GAO, $g \in G$, $g > 0$, g fixé et $h \in G$. Alors il existe un unique $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ satisfaisant:

$$(+) \quad \forall q \in \mathbb{Q} : \begin{cases} q < x & \Rightarrow \quad qg < h, \\ q > x & \Rightarrow \quad qg > h. \end{cases}$$

On note cet unique élément par $\frac{h}{g}$, et on a:

$$\frac{h_1 + h_2}{g} = \frac{h_1}{g} + \frac{h_2}{g}$$

et

$$\frac{qh_1}{g} = q\frac{h_1}{g}$$

pour $h_1, h_2 \in G$ t.q. ces quantités sont bien définies.
Notons que si qg n'est pas défini, par exemple si G n'est pas divisible, alors $(+)$ a le sens suivant:

$$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \begin{cases} \frac{m}{n} < x \Rightarrow mg < nh \\ \frac{m}{n} > x \Rightarrow mg > nh. \end{cases}$$

Preuve:
Soit $h \in G$ et considérons: $X_h = \{q > 0\,;\, qg \leq |h|\}$. C'est un segment initial de $\mathbb{Q}^{>0}$.

Si $X_h = \emptyset$, alors $x = 0$ satisfait $(+)$.

Si $X_h = \mathbb{Q}^{>0}$ et $h > 0$, alors $x = \infty$ satisfait $(+)$.

Si $X_h = \mathbb{Q}^{>0}$ et $h < 0$, alors $x = -\infty$ satisfait $(+)$.

Si $X_h \neq \mathbb{Q}^{>0}$ et $X_h \neq \emptyset$, la borne supérieure de X_h est un réel r positif. Si $h > 0$, r satisfait $(+)$; si $h < 0$, $-r$ satisfait $(+)$. L'unicité est vérifiée sans peine, ainsi que les égalités données dans l'énoncé. $\diamond$

Remarques 2.2

$\frac{h}{g} > 0$ ssi $h > 0$.

$\frac{h}{g}$ est un réel non nul ssi $h \sim g$.

$\frac{h}{g} = 0$ ssi $h \ll g$.

$\frac{h}{g} = \infty$ ssi $h > 0$ et $g \ll h$.

$\frac{h}{g} = -\infty$ ssi $h < 0$ et $g \ll h$.

Lemme 2.3
Pour $g \in G$, $g > 0$ on définit $A_g = \{r \in \mathbb{R}\,;\, \exists h \in G \text{ t.q. } \frac{h}{g} = r\}$. Alors A_g est un sous groupe de $\mathbb{R}$, divisible si G l'est. Si G est divisible et $\aleph_0$–saturé alors $A_g = \mathbb{R}$.

Preuve:
La première assertion est immédiate par le lemme 2.1. Si G est divisible et $\aleph_0$–saturé, soit $r \in \mathbb{R}$ et sans perte de généralité, supposons $r > 0$. Considérons l'ensemble des formules $C(x) = \{qg \leq x\,;\, q \in \mathbb{Q}, q \leq r\} \cup \{qg > x\,;\, q \in \mathbb{Q} q > r\}$. $C(x)$ a le seul paramètre g, et est finiment réalisé dans G; il doit donc être réalisé par un élément $h \in G$, alors par définition $\frac{h}{g} = r$. $\diamond$

Corollaire 2.4

$$B_g = C_g/D_g \simeq A_g, \forall g > 0.$$

Preuve:
En fait $\psi_g : C_g \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $h \mapsto \frac{h}{g}$ est un homomorphisme de groupes ordonnés, dont le noyau est D_g et l'image A_g. $\diamond$

Nous allons maintenant démontrer le

Théorème A
Soit G un GADO de squelette $[I\,;\, B_i, i \in I]$ alors $\bigoplus_{i \in I} B_i \hookrightarrow G$. (En particulier, si G est $\aleph_0$–saturé alors $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{R} \hookrightarrow G$).
$\bigoplus_{i \in I} B_i$ désigne le sous groupe de $\Gamma_{i \in I} B_i$ des fonctions à support fini.

Nous avons besoin de quelques lemmes. Dans ce qui suit G est divisible.

Lemme 2.5
Soit $g \in G$, $g > 0$ et H un sous groupe divisible de G, contenant g, archimédien, et maximal pour ces conditions. Alors $\phi_g : H \longrightarrow A_g$ défini par $h \mapsto \frac{h}{g}$ est un isomorphisme de groupes ordonnés.

Preuve:
Premièrement, $\{qg\,;\, q \in \mathbb{Q}\}$ est archimédien, divisible et contient g, donc par Zorn, un tel H maximal existe. Puis, par 2.1 et 2.2, et H étant archimédien, ϕ_g est bien définie, injective, préserve l'ordre et l'addition. Il reste à démontrer que ϕ_g est surjective, supposons que

non; alors soit $r \in A_g$, $r \notin \phi_g(H)$. Il existe $g_1 \in G$ t.q. $\frac{g_1}{g} = r$ et $g_1 \notin H$. On va montrer que $H + \mathbb{Q} g_1$ est archimédien (d'où contradiction!). Soit $q \in \mathbb{Q}$, $h \in H$, on montre que $\dfrac{h + qg_1}{g}$ est un réel non nul. Sans perte de généralité, $h + qg_1 > 0$. $\dfrac{h + qg_1}{g} = \dfrac{h}{g} + q\dfrac{g_1}{g} \neq \infty$; si $\dfrac{h + qg_1}{g} = 0$, alors $\dfrac{h}{g} = -qr$ et $r = \dfrac{-1}{q}\dfrac{h}{g} = q'\dfrac{h}{g} = \dfrac{q'h}{g}$ avec $q' = \dfrac{-1}{q}$; mais $q'h \in H$ car H est divisible, donc $\dfrac{q'h}{g} \in \phi_g(H)$, i.e. $r \in \phi_g(H)$. Contradiction. $\diamond$

Exemple 2.6
Dans le lemme 2.5, l'hypothèse de divisibilité est indispensable: dans le produit lexicographique $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, soit $x = (1,0)$ et $y = (1,1)$, et $G = \mathbb{Z}x + \mathbb{Q}y$, alors G n'est pas divisible. On a $x \sim y$, $C_x = C_y = G$, et $\pi : C_x \longrightarrow \mathbb{Q}$ défini par: $(q, q') \mapsto q$
est surjectif de noyau D_x, alors $C_x/D_x \simeq \mathbb{Q}$, donc $A_x \simeq \mathbb{Q}$. D'autre part, soit $H = \mathbb{Z}x \simeq \mathbb{Z}$, alors H est archimédien, contient x et est maximal, en fait: si $H' \supset H$ est archimédien, alors $H' \bigcap \mathbb{Q}y = 0$, sinon soit $m \neq 0$ t.q. $\frac{m}{n}y \in H' \Rightarrow my \in H'$ mais $mx \in H' \Rightarrow 0 \neq my - mx = (0, m) \in H'$, ce qui contredit que H' est archimédien. Donc si $t = zx + qy \in H'$ alors $t - zx = qy \in H' \Rightarrow q = 0 \Rightarrow H' = H$.

Lemme 2.7
Soient $h_1, h_2, ..., h_n \in G$ t.q. $h_1 \gg h_j$ pour $j = 2, ..., n$.
Alors

$$\textstyle\sum_{j=1}^n h_j > 0 \;\text{ si }\; h_1 > 0,$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^n h_j < 0 \;\text{ si }\; h_1 < 0.$$

Preuve: Soit $s = \sum_{j=1}^n h_j$, alors

$$\frac{s}{|h_1|} = \frac{h_1}{|h_1|} + ... + \frac{h_n}{|h_1|} = \begin{cases} 1 & \text{si } h_1 > 0 \\ -1 & \text{si } h_1 < 0\,. \end{cases}$$

Il s'ensuit, par Remarques 2.2, que $\begin{cases} s > 0 & \text{si } h_1 > 0 \\ s < 0 & \text{si } h_1 < 0\,. \end{cases}$ $\diamond$

Corollaire 2.8
Soit I =rang G, $\{g_i > 0\,;\, i \in I\}$ un ensemble complet de représentants des classes de $\sim$ dans G, $\{H_i\,;\, i \in I\}$ un choix de sous groupes archimédiens maximaux t.q. $g_i \in H_i$, alors $\bigoplus_{i \in I} H_i \hookrightarrow G$.
Preuve: Soit $\iota : \bigoplus_{i \in I} H_i \longrightarrow G$ définie par $\iota(f) = \sum_{i \in I} f(i)$, ι préserve l'addition; si $f > 0$ soit support $f = \{i_0, ..., i_n\}, i_0 < ... < i_n$, alors $f(i_0) > 0$ et par définition de l'ordre sur I, $f(i_0) \gg ... \gg f(i_n)$, donc par 2.7, $\iota(f) > 0$, i.e. ι est injective et préserve l'ordre. $\diamond$

Le théorème **A** découle immédiatement de 2.4, 2.5 et 2.8.

Pour terminer cette section nous allons donner un contrexemple au théorème **A**, pour G non divisible.

Exemple 2.9
Soit $A = \frac{1}{2^\infty}\mathbb{Z} = \{\frac{z}{2^n}\,;\, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \frac{1}{3^\infty}\mathbb{Z} = \{\frac{z}{3^n}\,;\, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
Dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, considérons $G = \{(a + b, b)\,;\, a \in A, b \in B\}$. Le rang de G est 2, $B_1 \simeq A + B = \frac{1}{6^\infty}\mathbb{Z}$, et $B_2 \simeq \mathbb{Z}$. Mais B_1 ne peut se plonger dans G, car tout élément de B_1 est infiniment divisible par 6, et aucun élément non nul de G ne l'est.

§3. Le théorème de plongement de Hahn.

Soit G un GADO de squelette $[I_G\,;\,B_i, i\in I_G]$ et posons $W(G)=\Gamma_{i\in I_G}B_i$.

Théorème B

$$G\hookrightarrow W(G).$$

Preuve: Voir [FU] (chap.4, théorème 16). $\diamond$

Valuations de GAO

Définitions 3.1

Soit G un groupe abélien et T une chaîne. Une valuation de G est une fonction

$$v:G\longrightarrow T\cup\{\infty\},$$

où par définition ∞ est un point plus grand que tous les éléments de T, t.q.

$$v(g)=\infty \text{ ssi } g=0,$$
$$v(na)=v(a)\quad \forall n\neq 0,$$
$$v(a+b)\geq \min(v(a),v(b)).$$

La valuation naturelle d'un GAO de rang I_G est: $v:G\longrightarrow I_G\cup\{\infty\}$ définie par $a\mapsto[a]$, si $a\neq 0$. Que $v(a+b)\geq\min(v(a),v(b))$ suit facilement par 2.1 et 2.2, par exemple.
Si $G'\supseteq G, G'$ est une <u>extension archimédienne</u> de G ssi le plongement Id de I_G dans $I_{G'}$ est surjectif; si de plus $\forall i\in I_G$, Id_i de B_i dans $B'_{Id(i)}$ est surjectif, G' est une <u>extension immédiate</u>. G est <u>archimédien complet</u> s'il n'admet pas d'extensions archimédiennes propres, et <u>maximalement valué</u> s'il n'admet pas d'extensions immédiates propres.
Remarquons que: G est archimédien complet $\Rightarrow G$ est maximalement valué.

Théorème 3.2

(i) G est maximalement valué ssi $G\simeq W(G)$.
(ii) G est archimédien complet ssi $G\simeq \mathbb{R}^{I_G}$.

Preuve: Voir [FU] (chap.4, th.17 et 18). $\diamond$

§4. Les indiscernables.

Soit G un GADO.

Définitions 4.1

Un sous ensemble C de G est un <u>ensemble d'indiscernables</u> ssi pour toute suite d'entiers $n_1,n_2,\ldots,n_k$ et pour tout $c_1<c_2<\ldots<c_k$, $d_1<d_2<\ldots<d_k$ de C on a:

$$\textstyle\sum_{i=1}^k n_ic_i>0 \text{ ssi } \sum_{i=1}^k n_id_i>0.$$

Si I est une chaîne, $\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ sera toujours une suite croissante d'éléments de G.
Un <u>I-type d'indiscernables</u> est un ensemble maximal consistant de formules en les variables $\{x_i\,;\,i\in I\}$ satisfait par une suite d'indiscernables $\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$.

Théorème 4.2 (classification des I-types d'indiscernables)
Soit I une chaîne. Alors il existe exactement 3 I-types d'indiscernables avec $x_i>0$. En fait, soit $i_1<i_2<i_3\in I$, alors les 3 I-types sont déterminés par les formules:
1) $2x_{i_1}<x_{i_2}$;
2) $x_{i_2}<2x_{i_1}$ et $2(x_{i_2}-x_{i_1})<(x_{i_3}-x_{i_1})$;
3) $x_{i_2}<2x_{i_1}$ et $(x_{i_3}-x_{i_1})<2(x_{i_2}-x_{i_1})$.
Une formulation plus claire de cet énoncé, et qui en fait contient l'idée de la preuve est:
Pour une suite $\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ et $i_1<i_2<i_3\in I$, les théories
1) "$\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ sont indiscernables" + "$0<2c_{i_1}<c_{i_2}$",
2) "$\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ sont indiscernables" + "$0<c_{i_2}<2c_{i_1}$ et $2(c_{i_2}-c_{i_1})<(c_{i_3}-c_{i_1})$",
3) "$\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ sont indiscernables" + "$0<c_{i_2}<2c_{i_1}$ et $(c_{i_3}-c_{i_1})<2(c_{i_2}-c_{i_1})$"

sont complètes et
$\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ satisfait 1) $\Longleftrightarrow$ ($c_i\ll c_j$ ssi $i<j$),
$\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ satisfait 2) $\Longleftrightarrow$ il existe $\langle d_i\,;\,i\in I\rangle$ une suite d'indiscernables satisfaisant 1) et il existe $a\in G$ t.q. $a\gg d_i$ pour tout $i\in I$ et $c_i=a+d_i$ pour tout $i\in I$,
$\langle c_i\,;\,i\in I\rangle$ satisfait 3) $\Longleftrightarrow$ il existe $\langle d_i\,;\,i\in I\rangle$ une suite d'indiscernables satisfaisant 1) et il existe $a\in G$ t.q. $a\gg d_i$ pour tout $i\in I$ et $c_i=a-d_i$ pour tout $i\in I$.
Preuve: Voir [ROS]. $\diamond$

Corollaire 4.3

Pour tout I, il existe exactement 6 I-types d'indiscernables, les 3 du théorème et leurs opposés.

Preuve: Voir [ROS]. $\diamond$

Corollaire 4.4

Soit G un GADO. Il existe un ensemble maximal de 1)-indiscernables (i.e. satisfaisant le cas 1) dans 4.2). Il est unique à isomorphisme de chaînes près. Si I est son type d'ordre alors I^* est précisément I_G. (I^* est le type d'ordre inversé de I.)

Preuve: Voir [ROS]. $\diamond$

§5. Caractérisation de GADO κ-saturés.

Rappels 5.1

Théorème

GADO est modèle complète, admet l'élimination des quantificateurs, et est complète.

Preuve: Voir [ROB]. $\diamond$

Soit T une expansion complète et dénombrable de la théorie de l'ordre total.

Définition

T est <u>o-minimale</u> ssi pour chaque modèle M de T, et chaque formule $\phi(x,a_1,\ldots,a_n)$ à une variable et à paramètres dans M, ϕ est équivalente à une réunion finie d'intervalles de M (2 à 2 disjoints).
(Cette notion est développée dans [P-S].)

Théorème 5.2

Soit T o-minimale, $M\models T$ et $\kappa>\aleph_0$. Alors M est κ-saturé ssi M est κ-saturé en tant qu'ensemble ordonné.

Preuve: $\Rightarrow$ est évidente.
Pour la réciproque, soit $A\subset M$, $\operatorname{card}(A)<\kappa$ et $p\in S_1(A)$ ($S_1(A)$ dénote l'espace des types sur M à une variable et à paramètres dans A). Soit $M'\succ M$, $d\in M'$ t.q. $p=tp_{M'}(d/A)$. Soit $\lambda=\max(\aleph_0,\operatorname{card}(A))$ alors $\lambda<\kappa$. Soit $\{\phi_\gamma\,;\,\gamma\in\lambda\}$ une énumération des formules de p, pour chaque γ soit $A_\gamma\subseteq M$ l'ensemble des extrémités des intervalles desquels ϕ_γ est la réunion, et $\{a_\gamma,b_\gamma\}\subseteq A_\gamma$ les extrémités de l'intervalle particulier dans lequel d se trouve. Soit $A'=\bigcup_{\gamma\in\lambda}\{a_\gamma,b_\gamma\}$ alors $\kappa>\operatorname{card}(A')$ et $C(x)=\{a_\gamma\leq x\,;\,\gamma\in\lambda\}\cup\{x\leq b_\gamma\,;\,\gamma\in\lambda\}$ est une coupure consistante avec $Th(M,\underline{a})_{a\in A}$ puisque réalisée par $d\in M'\succ M$, et à paramètres dans A', donc réalisée par un c dans M dés que l'ordre de M est κ-saturé, et il est clair que $M\models C(c)\Rightarrow M\models p(c)$. $\diamond$

Remarques 5.3

(i) Par élimination des quanteurs, GADO est o-minimale, en fait $\phi(x,a_1,\ldots,a_n)$ est équivalente à une réunion finie d'intervalles à extrémités dans $\sum_{i=1}^n\mathbb{Q}\,a_i$ (le plus petit sous groupe divisible de G contenant $a_1,\ldots,a_n$). Donc pour $\kappa>\aleph_0$ G est κ-saturé ssi G est κ-saturé en tant qu'ensemble ordonné.

(ii) L'hypothèse $\kappa > \aleph_0$ est indispensable, par exemple $(\mathbb{R}, +, 0, <)$ n'est pas $\aleph_0$-saturé, et pourtant $(\mathbb{R}, <)$ l'est, étant un ordre dense sans extrémités (ODSE).

(iii) Soit $p \in S_1(A)$, pour réaliser p il faut et il suffit de remplir la coupure:

$$\{b \leq x\,;\, b \in \textstyle\sum \mathbb{Q}A\,,\, p \vdash b \leq x\} \cup \{x \leq c\,;\, c \in \textstyle\sum \mathbb{Q}A\,,\, p \vdash x \leq c\}.$$

($\sum \mathbb{Q}A$ dénote le plus petit sous groupe divisible de G contenant A.)

Rappels 5.4

1) Soit $\kappa = \aleph_\alpha$. Une chaîne A est <u>κ-dense</u>, (ou encore: est un ensemble η_α), ssi étant donnés A_1, A_2 sous-ensembles de A de cardinalité $< \kappa$ et t.q. $A_1 < A_2$ alors il existe $a \in A$ t.q. $A_1 < a < A_2$.

2) Remarques:
A est ODSE ssi A est $\aleph_0$-dense.
Si A est un ODSE alors $\forall \kappa \geq \aleph_0$, A est κ-dense ssi A est κ-saturé (car ODSE admet l'élimination des quanteurs).

3) Soit λ un ordinal limite, une suite $(a_\nu)_{\nu<\lambda}$ d'éléments d'un GAO G est <u>pseudo-Cauchy</u> ssi pour tout $\nu < \rho < \mu < \lambda$: $D_{(a_\rho - a_\mu)} \subsetneq D_{(a_\nu - a_\rho)}$. $a \in G$ est une <u>pseudo-limite</u> de (a_ν) ssi pour tout $\nu < \lambda$: $D_{(a-a_\nu)} = D_{(a_\nu - a_{\nu+1})}$. Cette condition est équivalente à: pour tout $\nu < \lambda$: $D_{(a-a_{\nu+1})} \subsetneq D_{(a_\nu - a_{\nu+1})}$. Ou encore à: pour tout $\nu < \lambda$: $D_{(a-a_{\nu+1})} \subsetneq D_{(a-a_\nu)}$. Remarquons que si pour une suite $(a_\nu)_{\nu<\lambda}$ de G, il existe $a \in G$ t.q. l'une de ces 3 conditions soit vérifiée, alors la suite est pseudo-Cauchy et a en est une pseudo-limite.

Nous avons maintenant la machinerie nécessaire pour montrer le

Théorème C

Soit G un GADO et $\kappa \geq \aleph_0$, alors G est κ-saturé ssi
1) le rang de G est κ-dense,
2) toutes les composantes archimédiennes de G sont isomorphes à $\mathbb{R}$,
3) toute suite pseudo-Cauchy indexée par $\lambda < \kappa$ a une pseudo-limite dans G.

Preuve: Notons auparavant que la condition 1) est équivalente à dire que l'ensemble $\{D_g\,;\, g \in G, g \neq 0\}$ ordonné par l'inclusion est κ-dense, que la condition 2) est équivalente à dire que pour tout $g > 0$, $A_g = \mathbb{R}$, et que puisque G est un GADO, alors G en tant qu'ordre est un ODSE.

Supposons donc que G est κ-saturé et montrons que 1), 2), 3) sont satisfaites:
1) Soient $H_i \subseteq G, \mathrm{card}(H_i) < \kappa, 0 \notin H_i, (i = 0, 1)$, t.q. pour tout $h_0 \in H_0$ et $h_1 \in H_1$ on a $D_{h_0} \subsetneq D_{h_1}$. On veut h t.q. $D_{h_0} \subsetneq D_h \subsetneq D_{h_1}$ pour tout $h_0 \in H_0, h_1 \in H_1$. Considérons

$$\Gamma(x) = \{n|h_0| < x\,;\, n \in \mathbb{N}, h_0 \in H_0\} \cup \{nx < |h_1|\,;\, n \in \mathbb{N}, h_1 \in H_1\}.$$

On voit que $\Gamma(x)$ est finiment réalisé dans G et a moins de κ paramètres; alors prenons $h \in G$ t.q. $G \models \Gamma(h)$.
2) est déjà démontré dans 2.3, avec seulement l'hypothèse: G est $\aleph_0$-saturé.
3) Soit $(a_\nu)_{\nu<\lambda}, \lambda < \kappa$ pseudo-Cauchy, on veut $a \in G$ t.q. $D_{(a-a_{\nu+1})} \subsetneq D_{(a_\nu - a_{\nu+1})}, \forall \nu < \lambda$. Considérons

$$\Gamma'(x) = \{n|x - a_{\nu+1}| < |a_\nu - a_{\nu+1}|\,;\, \nu < \lambda, n \in \mathbb{N}\}.$$

C'est finiment réalisé dans G puisque $(a_\nu)_{\nu<\lambda}$ est pseudo-Cauchy, et a moins de κ paramètres; prenons $a \in G$, $a \models \Gamma'(x)$.

Maintenant on montre la réciproque, nous aurons besoin du

Lemme

Un GADO de base finie sur $\mathbb{Q}$ a un rang fini.

En fait, par le lemme 2.7, on voit que si $h_1, \ldots, h_n$ sont 2 à 2 non équivalents alors ils sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Soit $A \subset G$, $\mathrm{card}(A) < \kappa$ et $p \in S_1(A)$. Par 5.3 (iii) on veut remplir la coupure:

$$(*) \qquad \{b \leq x\,;\, b \in \textstyle\sum \mathbb{Q}A\,,\, p \vdash b \leq x\} \cup \{x \leq c\,;\, c \in \textstyle\sum \mathbb{Q}A\,,\, p \vdash x \leq c\}.$$

Si $(*)$ contient une égalité $x = b$ c'est gagné, supposons donc qu'il n'y a que des inégalités strictes dans $(*)$.
Posons: $G' = \sum \mathbb{Q}A$, $B = \{b \in G'\,;\, p \vdash b < x\}$, $C = \{c \in G'\,;\, p \vdash x < c\}$.
Soit $G'' \succ G$ et $x_0 \in G''$ t.q. $p = tp_{G''}(x_0/A)$.

<u>Remarque sur la notation</u>: à partir d'ici, on écrit $D(g)$ au lieu de D_g, $D(g) \geq D(h)$ au lieu de $D_g \subseteq D_h$ et $D(g) > D(h)$ au lieu de $D_g \subsetneq D_h$. Au vu de la définition du rang (définition 1.3), $D(g) = D_g$ a les propriétés de la valuation naturelle $v(g) = [g]$ définie en 3.1.

Il y a trois cas à considérer; en fait, dans G'', on regarde $\mathcal{D} = \{D(d - x_0)\,;\, d \in G'\}$.
Si cet ensemble n'a pas de maximum, ceci veut dire que x_0 doit être une pseudo-limite d'une suite pseudo-Cauchy dans G' et la condition 3) du théorème nous permettra de remplir $(*)$ dans G.
Si au contraire, il existe $d_0 \in G'$ t.q. $D(d_0 - x_0)$ est maximum, alors on suppose que la condition supplémentaire suivante est vérifiée: il existe $b_0 \in B$ et $c_0 \in C$ t.q. $\forall b \in B, b \geq b_0$ et $\forall c \in C$, $c \leq c_0$ on a:

$$D(b - d_0) = D(x_0 - d_0) = D(c - d_0) \text{ et } D(b - x_0) = D(x_0 - d_0) = D(c - x_0),$$

et on "divise" $(d - d_0)$ par $(b_0 - d_0)$ (pour $d \in G' \cap [b_0, c_0]$). La condition supplémentaire nous assure que le résultat de cette division est une vraie coupure (un trou) dans $\mathbb{R}$, que l'on peut remplir à présent dans G grâce à la condition 2) du théorème.
Finalement, on montre que dans le cas qui reste, on obtient toujours une coupure dans le rang de G, que la condition 1) du théorème nous permet de remplir.

Premier cas: $\forall d \in G', \exists d' \in G'$ t.q. $D(d' - x_0) > D(d - x_0)$. (Noter que ce cas est exclu si $\kappa = \aleph_0$, car G' ayant un rang fini, $G' + \mathbb{Q}x_0$ a aussi un rang fini, et $\mathcal{D}$ a forcément un maximum; on suppose donc qu'ici $\kappa > \aleph_0$). Soit $\{D(d_\lambda - x_0)\}_{\lambda<\mu}$ une suite cofinale dans $\mathcal{D}$, alors $\{d_\lambda\}_{\lambda<\mu}$ est une suite pseudo-Cauchy dans G' avec pseudo-limite x_0 et $\mu < \kappa$ puisque $\mathrm{card}(G') < \kappa$. Soit $a \in G$ une pseudo-limite (a existe par la condition 3) du théorème), alors a remplit $(*)$, en fait on a que:
$D(a - x_0) = D(a - d_\lambda + d_\lambda - x_0) \geq \min(D(a - d_\lambda), D(d_\lambda - x_0))$
et $D(a - d_\lambda) = D(d_{\lambda+1} - d_\lambda) = D(x_0 - d_\lambda)$,
donc pour tout λ on a: $D(a - x_0) \geq D(d_\lambda - x_0)$,
donc pour tout $d \in G'$ on a: $D(a - x_0) > D(d - x_0)$.
Maintenant, soit $b \in B$, on montre que $b < a$. Sinon $b \geq a$, alors $a \leq b < x_0$, ce qui implique que $D(b - x_0) \geq D(a - x_0)$, contradiction! De même, on montre que si $c \in C$, alors $a < c$. Donc a satisfait bien $(*)$.

Deuxième cas: Fixons $d_0 \in G'$ t.q. $D(d_0 - x_0)$ est le maximum de $\mathcal{D}$ et supposons la condition supplémentaire suivante:
$\exists b_0 \in B$ et $\exists c_0 \in C$ t.q. $\forall b \in B, b \geq b_0$ et $\forall c \in C$, $c \leq c_0$ on a:
(i) $D(b - d_0) = D(x_0 - d_0) = D(c - d_0)$ et
(ii) $D(b - x_0) = D(x_0 - d_0) = D(c - x_0)$.

Supposons que $d_0 \in B$, alors on doit avoir que $d_0 < b_0$. Considérons la coupure:

$$\{b - d_0 < x'\,;\, b \in B,\, b \geq b_0\} \cup \{x' < c - d_0\,;\, c \in C,\, c \leq c_0\}.$$

Il est clair que si x' la remplit, alors $x' + d_0$ remplit $(*)$. On a d'autre part:
(iii) $\forall b \in B, b \geq b_0$ et $\forall c \in C$, $c \leq c_0$

$$\frac{b - d_0}{b_0 - d_0} < \frac{x_0 - d_0}{b_0 - d_0} < \frac{c - d_0}{b_0 - d_0}$$

ces inégalités étant strictes à cause de (i) et (ii).
(Notons que ces inégalités se réfèrent à G'', mais que $\frac{b-d_0}{b_0-d_0}$ et $\frac{c-d_0}{b_0-d_0}$ au sens de G'' sont les mêmes réels qu'au sens de G.)
Considérons

$$\{\frac{b-d_0}{b_0-d_0}\,;\, b\in B,\, b\geq b_0\}\cup\{\frac{c-d_0}{b_0-d_0}\,;\, c\in C,\, c\leq c_0\};$$

par (i), c'est un ensemble de réels, et par (iii), il existe $r'\in I\!R$ t.q.

$$\{\frac{b-d_0}{b_0-d_0}\,;\, b\in B,\, b\geq b_0\}<r'<\{\frac{c-d_0}{b_0-d_0}\,;\, c\in C,\, c\leq c_0\}.$$

Soit $x'\in G$ t.q. $\frac{x'}{b_0-d_0}=r'$ (x' existe par la condition 2) du théorème), et par 2.2 on a que:

$$b-d_0<x'<c-d_0, \forall b\in B,\ b\geq b_0, \forall c\in C,\ c\leq c_0.$$

Finalement, si $d_0\in C$, alors on doit avoir $c_0<d_0$ et on fait un argument symétrique.

Troisième cas: Examinons à présent le cas où la condition supplémentaire du deuxième cas n'est pas satisfaite, la négation de cette condition donne:
$\forall b_0\in B\,\exists b\geq b_0, b\in B$ t.q. $(D(b-d_0)\neq D(x_0-d_0))\vee(D(x_0-b)<D(x_0-d_0))$
ou
$\forall c_0\in C\,\exists c\leq c_0, c\in C$ t.q. $(D(c-d_0)\neq D(x_0-d_0))\vee(D(x_0-c)<D(x_0-d_0))$.

Supposons d'abord que $d_0\in B$, alors
$\forall b\in B,\ b\geq d_0$: $0<x_0-b\leq x_0-d_0$ et $0\leq b-d_0\leq x_0-d_0$, donc

$$(\dagger)\qquad \forall b\in B,\ b\geq d_0: D(x_0-b)\geq D(x_0-d_0) \text{ et } D(b-d_0)\geq D(x_0-d_0).$$

Et $\forall c\in C: 0<x_0-d_0<c-d_0$, donc

$$(\ddagger)\qquad \forall c\in C: D(x_0-d_0)\geq D(c-d_0).$$

Si $\forall b_0\in B\,\exists b\geq b_0, b\in B$ t.q. $(D(b-d_0)\neq D(x_0-d_0))\vee(D(x_0-b)<D(x_0-d_0))$ est vrai, c'est vrai en particulier si $b_0\geq d_0$, donc par (†) on a :
$\forall b_0\geq d_0\exists b\geq b_0, b\in B$ t.q. $D(b-d_0)>D(x_0-d_0)$,
mais $0\leq b_0-d_0\leq b-d_0\Rightarrow D(b_0-d_0)\geq D(b-d_0)>D(x_0-d_0)$,
donc $\forall b\geq d_0, b\in B: D(b-d_0)>D(x_0-d_0)$.

Si $\forall c_0\in C\,\exists c\leq c_0, c\in C$ t.q. $(D(c-d_0)\neq D(x_0-d_0))\vee(D(x_0-c)<D(x_0-d_0))$ est vrai, alors avec (‡) on obtient:
$\forall c_0\in C\,\exists c\leq c_0, c\in C$ t.q. $(D(c-d_0)<D(x_0-d_0))\vee(D(x_0-c)<D(x_0-d_0))$,
mais $D(c-x_0)\geq \min(D(x_0-d_0), D(c-d_0))$, donc si $D(c-x_0)<D(x_0-d_0)$,
alors $D(c-d_0)<D(x_0-d_0)$,
ainsi on a en tout cas: $\forall c_0\in C\,\exists c\leq c_0, c\in C$ t.q. $D(c-d_0)<D(x_0-d_0)$,
mais $0<c-d_0<c_0-d_0\Rightarrow D(c_0-d_0)\leq D(c-d_0)<D(x_0-d_0)$,
donc $\forall c\in C\ :\ D(c-d_0)<D(x_0-d_0)$.
On a donc que:
$d_0\in B\Rightarrow[\forall b\in B$ t.q. $b\geq d_0: D(b-d_0)>D(x_0-d_0)]\vee[\forall c\in C: D(c-d_0)<D(x_0-d_0)]$.

Une analyse analogue nous permet de conclure que si $d_0\in C$, alors
$[\forall c\in C$ t.q. $c\leq d_0: D(c-d_0)>D(x_0-d_0)]\vee[\forall b\in B: D(b-d_0)<D(x_0-d_0)]$.

Remplissons à présent (∗) dans G dans ce troisième cas. Supposons d'abord que $d_0\in B$:
Si $\forall b\in B$ t.q. $b\geq d_0: D(b-d_0)>D(x_0-d_0)$,
on a d'autre part par (‡) que $\forall c\in C: D(x_0-d_0)\geq D(c-d_0)$;
alors

$$\{D(b-d_0)\cap G\,;\, b\in B, b\geq d_0\}\cup\{D(c-d_0)\cap G\,;\, c\in C\}$$

produit une coupure dans le rang de G à paramètres dans le rang de G'. Si $\kappa=\aleph_0$ alors le rang de G' est fini, donc les deux ensembles ci-dessus sont finis et on peut remplir cette coupure puisque le rang de G est dense par la condition 1) du théorème. Si $\kappa>\aleph_0$ alors les ensembles ci-dessus ont cardinalité $<\kappa$, et on peut encore remplir car le rang de G est κ–dense. Dans tous les cas soit $y\in G$, $y>0$ t.q.:

$$D(b-d_0)\cap G\subsetneqq D(y)\cap G\subsetneqq D(c-d_0)\cap G\ , \forall c\in C, \forall b\in B, b\geq d_0,$$

alors $\quad b-d_0<y<c-d_0, \forall c\in C, \forall b\in B, b\geq d_0,$
alors $\quad b<y+d_0<c, \forall c\in C, \forall b\in B, b\geq d_0,$
alors $\quad b<y+d_0<c, \forall c\in C, \forall b\in B,$
alors $\quad y+d_0$ remplit (∗).

Si $\forall c\in C: D(c-d_0)<D(x_0-d_0)$,
on a d'autre part par (†) que $D(b-d_0)\geq D(x_0-d_0), \forall b\in B,\ b\geq d_0$,
alors comme avant on remplit la coupure produite par

$$\{D(b-d_0)\cap G\,;\, b\in B,\ b\geq d_0\}\cup\{D(c-d_0)\cap G\,;\, c\in C\}$$

et ainsi (∗).

Finalement, si $d_0\in C$, une analyse analogue nous permet de remplir (∗), et ceci termine la démonstration du théorème. ⋄

Exemples et corollaires

Corollaire 5.5
G est $\aleph_0$–saturé ssi
1) le rang de G est un ODSE,
2) ses composantes archimédiennes sont toutes $I\!R$.

Preuve: Immédiat par théorème **C**. ⋄

Corollaire 5.6
G est $\aleph_0$–saturé ssi I_G est un ODSE et $G\simeq G'$ avec $\bigoplus_{I_G} I\!R\subseteq G'\subseteq I\!R^{I_G}$.

Preuve: Immédiat par les théorèmes **A**, **B** et **C**. ⋄

Corollaire 5.7
Si I_G est dénombrable, alors G est $\aleph_0$–saturé ssi $G\simeq G'$ avec $\bigoplus_{\mathbb{Q}} I\!R\subseteq G'\subseteq I\!R^{\mathbb{Q}}$.

Corollaire 5.8
Soit $\alpha>0$ et soit I une chaîne $\aleph_\alpha$–dense, alors
a) $G=I\!R^I$ est $\aleph_\alpha$–saturé.
b) Soit $G_\alpha\subseteq G$ défini par: $G_\alpha=\{f\in G\,;\ \mathrm{card}(\text{support } f)<\aleph_\alpha\}$ et supposons de plus que $\aleph_\alpha$ est régulier, alors G_α est $\aleph_\alpha$–saturé.
c) Supposons de plus que $\sum_{\delta<\alpha}2^{\aleph_\delta}\leq\aleph_\alpha$ et que $\mathrm{card}(I)=\aleph_\alpha$, alors G_α est $\aleph_\alpha$–saturé de cardinalité $\aleph_\alpha$.

Preuve: Seul b) n'est pas évident. Indiquons brièvement pourquoi G_α a la propriété 3) du théorème **C**. Soit $\lambda<\aleph_\alpha$, $\{x_\nu\}_{\nu<\lambda}$ une suite pseudo-Cauchy de G_α, et $S=\bigcup_\nu$ support x_ν. Par régularité de $\aleph_\alpha$, on a $\mathrm{card}(S)<\aleph_\alpha$. Pour tout i dans un certain segment initial S_0 de S, $x_\nu(i)$ devient constant pour ν assez grand; appelons $x(i)$ cette valeur commune, et posons

$x(i) = 0$ pour $i \notin S_0$. Alors x a un support inclus dans S et est donc dans G_α, et c'est une limite de $\{x_\nu\}$.
Pour plus de détails voir [ALL]. ◇

Bibliographie

[ALL] N. Alling: On the existence of real closed fields that are η_α-sets of power $\aleph_\alpha$. *T.A.M.S* 103 (1962), 341–352

[FU] L. Fuchs: Partially ordered algebraic systems. Addison-Wesley, Reading, Mass., (1963)

[P-S] A. Pillay & C. Steinhorn: Definable sets in ordered structures I. Submitted to *T.A.M.S.*

[ROB] A. Robinson: Complete theories. North-Holland, Amsterdam (1956)

[ROS] D. Rosenthal: The order indiscernibles of divisible ordered abelian groups. *J.S.L.* 49 (1984), 151–160

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris VII
2, Place Jussieu
Paris Cedex 05
France

QUELQUES CONSTRUCTIONS SUR LES GROUPES ABELIENS ORDONNÉS

Françoise Delon et François Lucas

Depuis les travaux de Peter Schmitt [S1,S2], on contrôle bien équivalence et inclusion élémentaires entre groupes abéliens ordonnés (g.a.o.). Les propriétés logiques d'un g.a.o. G so ramenées à celles d'une infinité de "chaînes colorées", c'est–à–dire d'ordres totaux portant de prédicats unaires en nombre infini. Ces chaînes sont appelées les spectres de G et sont indexée $\mathbb{N}$. Elles sont interprétables dans G, et P. Schmitt a montré que deux g.a.o. sont élémentairem équivalents ssi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, leurs spectres d'ordre d'ordre n le sont; il a de plus donné un critère d'inclusion élémentaire (dont une des conditions est que, pour tout n, il y a un plonger naturel élémentaire du spectre d'ordre n).

<u>Quelques notations</u>.

— $Sp_n(G)$ désigne le spectre d'ordre n.

— $H \triangleleft G$ exprime que H est un sous–groupe convexe de G (G/H est alors ordonné par l'ordr quotient de celui de G); $H \triangleleft\neq G$ signifie $H \triangleleft G$ et $H \neq G$.

— $\mathscr{C}(G) = \{H \mid H \triangleleft\neq G\}$.