

22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

Bemerkung 22.1.

$W = K^1$ ist ein K -Vektorraum. $\dim(W) = 1$. Die Standard-Basis ist (1) . $W' \subseteq W$ ist ein Unterraum $\Rightarrow W' = \{0\}$ oder $W' = W$. Also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$ und $\dim W' = 1$ genau dann, wenn $W' \neq \{0\}$.

Definition 22.2.

$f \in L(V, K)$ heißt ein *lineares Funktional*.

Beispiel 22.3.

$V = K^n$; \mathcal{E} ist die Standard-Basis. Sei $(a_1, \dots, a_n) \in V$ fixiert.

Definiere $f : V \rightarrow K$ durch $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n a_i x_i$ (*)

Es gilt $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E},(1)} = [a_1 \dots a_n]$. Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$. Setze $a_j := f(\mathcal{E}_j)$, dann erfüllt f (*) für (a_1, \dots, a_n) .

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Basis.

Sei $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f : V \rightarrow K$ durch $f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. (*)

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B},(1)} = [[f(\alpha_1)]_{(1)} \mid \dots \mid [f(\alpha_n)]_{(1)}] = ([a_1]_{(1)} \mid \dots \mid [a_n]_{(1)}) = [a_1 \dots a_n]$.

Und umgekehrt: $f \in L(V, K)$, setze $a_i = f(\alpha_i)$, dann ist f wie in (*).

Beispiel 22.4.

$V = K^{n \times n}$; $tr : V \rightarrow K$

$tr(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ ist ein lineares Funktional.

Definition 22.6. und Notation

$V^* = L(V, K)$ heißt der *Dualraum*.

Sei nun $\dim V = n$.

Bemerkung 22.7.

$\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ für V werden wir nun eine Basis \mathcal{B}^* von V^* zuordnen.

Satz 17.8 liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit $f_i(\alpha) = \delta_{ij}$.

Behauptung

(f_1, \dots, f_n) ist eine Basis für V^* . Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Beweis

Für $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ mit $c_i \in K$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \quad (**)$$

Insbesondere wenn $f = 0$, dann gilt $f(\alpha_j) = 0$ für alle j , d.h. $c_j = 0$ für alle j . □

Definition 22.8.

$\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ heißt die *Dualbasis* zu \mathcal{B} .

Satz 22.9.

Sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Basis für V . Es existiert genau eine (Dual)Basis $\mathcal{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ für V^* , so dass

$$(1) \quad f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

$$(2) \quad \text{und } f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i \text{ für alle } f \in V^*$$

$$(3) \quad \text{und } \alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i \text{ für alle } \alpha \in V.$$

Das heißt für alle $f \in V^*$ und für alle $\alpha \in V$ gilt:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Dualität.}$$

Beweis

(1) Ergibt sich.

(2) $f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i$ und $(**)$ liefert $c_j = f(\alpha_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$.

(3) Analog: $\alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j$. □