Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob der Raum $C([a,b])$ mit der L_p-Norm $\|f\|_p := (\int\limits_a^b |f(x)|^p \; dx)^{1/p}$ für $1 \leq p \leq \infty$ vollständig ist.

Aufgabe 2

(Satz von Jordan und von Neumann) Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum E wird genau dann durch ein Skalarprodukt definiert, falls die Parallelogrammgleichung gilt. Beweisen Sie diesen Satz für den Fall eines reellen Grundkörpers.
Hinweis: In einem Raum mit Skalarprodukt lässt sich dieses durch die Norm ausdrücken. Verwenden Sie diesen Ausdruck als Definition des Skalarprodukts. Zeigen Sie dann in einem ersten Schritt $\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 2\langle \frac{1}{2}(x+y), z\rangle (x,y,z \in E)$.

Aufgabe 3

Sei E Vektorraum mit Skalarprodukt und $\{x_1,..,x_1\}$ ein Orthonormalsystem in E. Zeigen Sie, dass für $x \in E$ der Ausdruck $\|x - \sum\limits_{k=1}^n c_k x_k\|$ durch die Wahl $c_k = \langle x, x_k\rangle$ minimiert wird.

Aufgabe 4

Sei M eine Teilmenge eines Hilbertraums E. Zeigen Sie, dass $M^\perp$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von E ist, und dass $(M^\perp)^\perp$ gleich dem abgeschlossenen linearen Erzeugnis $\overline{spanM}$ von M ist.

Aufgabe 5

Sei E der $\mathbb{C}-$Vektorraum der endlichen Linearkombinationen der Funktionen $e_\lambda(x) := \exp(i\lambda x), \lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle f,g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \quad f(x) \quad \overline{g(x)} \quad dx$$

ein Skalarprodukt auf E ist, und dass $(E, \langle .,.\rangle)$ nicht vollständig ist.

Alle Aufgaben sind *schriftlich* zu bearbeiten und bis Donnerstag, 13.05.03, vor der Vorlesung abzugeben.