Skript zur Vorlesung

Fouriertransformation und Sobolevräume

Sommersemester 2012

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 8. 7. 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Lokalkonvexe Räume

Worum geht's? In der Funktionalanalysis wurde der Begriff des lokalkonvexen Vektorraums bereits definiert und kurz besprochen. Dies soll hier vertieft werden, insbesondere sollen Fragen wie Stetigkeit von Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen und Metrisierbarkeit diskutiert werden. Dieser Abschnitt dient vor allem als Vorbereitung auf die spätere Betrachtung von Distributionsräumen.

Im Folgenden seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1.1 Definition. Sei $\mathscr{P} = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Seminormen auf X. Man definiert $B^{(\lambda)}(x,r) := \{y \in X : p_\lambda(x-y) < r\}$ für $x \in X$ und $r > 0$. Dann heißt die von $\mathscr{U}_0 := \{B^{(\lambda)}(x,r) : \lambda \in \Lambda,\, x \in X,\, r > 0\}$ erzeugte Topologie $\tau_{\mathscr{P}} := \tau(\mathscr{U}_0)$ die von $\mathscr{P}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf X.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt ein lokalkonvexer Raum, falls eine Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen auf X existiert, so dass τ mit der oben beschriebenen Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ übereinstimmt.

1.2 Bemerkung. Nach Definition ist $\mathscr{U}_0$ eine Subbasis der lokalkonvexen Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$. Man kann $\tau_{\mathscr{P}}$ explizit angeben: Für $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ und $\varepsilon > 0$ definiere

$$U_{\mathscr{F},r} := \{x \in X \,|\, \forall\, p \in \mathscr{F} : p(x) < r\} = \bigcap_{\lambda : p_\lambda \in \mathscr{F}} B^{(\lambda)}(0,r).$$

Sei $\tau_0 := \{U_{\mathscr{F},r} : \mathscr{F} \subset \mathscr{P} \text{ endlich}, r > 0\}$. Dann ist τ_0 eine offene Umgebungsbasis der 0, und es gilt

$$\tau_{\mathscr{P}} = \{U \subset X : \forall\, x \in U\, \exists\, U_0 \in \tau_0 : x + U_0 \subset U\} =: \tau'.$$

Dabei folgt "$\supset$" aus der Definition von τ_0 und der Gleichheit $x + B^{(\lambda)}(0,r) = B^{(\lambda)}(x,r)$, und "$\subset$" aus der Tatsache, dass τ' bereits eine Topologie ist. Dies sieht man folgendermaßen:

Offensichtlich sind $\emptyset, X \in \tau'$. Seien $U_1, U_2 \in \tau'$ und $x \in U := U_1 \cap U_2$. Dann existieren $U_{10}, U_{20} \in \tau_0$ mit $x + U_{i0} \subset U_i$. Sei $U_{i0} = U_{\mathscr{F}_i, r_i}$. Dann gilt für $U_0 := U_{\mathscr{F},r}$ mit $\mathscr{F} := \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ und $r := \min\{r_1, r_2\}$ die Inklusion $x + U_0 \subset U$, d.h. $U \in \tau'$.

Sei I eine Menge, $U_i \in \tau'\,(i \in I)$, und $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ und $U_0 \in \tau_0$ mit $x + U_0 \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau'$.

1.3 Bemerkung. In der obigen Situation gilt:

a) Zu $U \in \tau_0$ existiert $V \in \tau_0$ mit $V + V \subset U$ (nämlich $V = U_{\mathscr{F}, r/2}$).

b) Alle $U \in \tau_0$ sind absorbierend, d.h. es gilt

$$\forall\, x \in X\, \exists\, \lambda > 0 : x \in \lambda U.$$

Denn es gilt $x \in \lambda U_{\mathscr{F},r}$, falls $\lambda > \frac{1}{r} \max_{p\in\mathscr{F}} p(x)$.

c) Zu $U \in \tau_0$ und $\lambda > 0$ existiert ein $V \in \tau_0$ mit $\lambda V \subset U$ (nämlich $V = U_{\mathscr{F},r/\lambda}$).

d) Jedes $U \in \tau_0$ ist kreisförmig, d.h.

$$\{\lambda : |\lambda| \le 1\} \cdot U \subset U,$$

und absolutkonvex, d.h.

$$\forall\, x, y \in U, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ mit } |\alpha| + |\beta| \le 1 : \; \alpha x + \beta y \in U.$$

1.4 Lemma. *Sei $\mathscr{P}$ eine Familie von Seminormen auf X. Dann ist $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein topologischer Vektorraum.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass Addition und Skalarmultiplikation stetig sind.

(i) Sei $W \in \tau_{\mathscr{P}}$ und $U := \{(x, y) \in X \times X : x + y \in W\}$. Zu zeigen ist, dass U offen ist bezüglich der Produkttopologie.

Sei $(x, y) \in U$. Wähle $U_0 \in \tau_0$ mit $x + y + U_0 \subset W$. Wähle weiter nach Bemerkung 1.3 a) ein $V \in \tau_0$ mit $V + V \subset U_0$. Dann ist $(x + V) \times (y + V) \subset U$, d.h. U ist offen.

(ii) Sei $W \in \tau_{\mathscr{P}}$ und $U := \{(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X : \lambda x \in W\}$. Sei $(\lambda, x) \in U$. Wähle $U_0 \in \tau_0$ mit $\lambda x + U_0 \subset W$. Dann existiert ein $V \in \tau_0$ mit $V + V \subset U_0$ nach 1.3 a) und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon x \in V$ nach 1.3 b). Da V kreisförmig ist (1.3 d)), gilt $(\mu - \lambda)x \in V$ falls $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Wähle $\widetilde{V} \in \tau_0$ mit $\mu\widetilde{V} \subset V$, falls $|\mu| \le |\lambda| + \varepsilon$ (1.3 c), d)). Für $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ und $v \in \widetilde{V}$ gilt

$$\mu(x + v) - \lambda x = (\mu - \lambda)x + \mu v \in V + V \subset U_0.$$

Damit ist $\{\mu \in \mathbb{K} : |\lambda - \mu| < \varepsilon\} \times (x + \widetilde{V}) \subset U$, d.h. U ist offen. □

1.5 Beispiele. a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\mathscr{P} := \{p_0\}$ mit $p_0(x) := \|x\|$. Dann stimmt die lokalkonvexe Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ mit der Normtopologie überein.

b) Sei Ω eine Menge, $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann ist $p_x(f) := |f(x)|$ eine Seminorm, und $\mathscr{P} := \{p_x : x \in \Omega\}$ erzeugt die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Allgemeiner sei E ein Banachraum, und $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen $f : \Omega \to E$. Dann ist $p_x(f) := \|f(x)\|_E$ eine Seminorm, und $\mathscr{P} := \{p_x : x \in \Omega\}$ erzeugt die Topologie der punktweisen Konvergenz.

c) Sei Ω ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ ein Vektorraum. Dann ist für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ durch $p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|$ eine Seminorm gegeben. Die von $\mathscr{P} := \{p_K : K \subset \Omega,\, K \text{ kompakt}\}$ erzeugte Topologie heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X = C^\infty(\Omega)$. Für $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ definiere

$$p_{K,\alpha}(\varphi) := \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $K \subset \Omega$ kompakt, wobei $\partial^\alpha := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$. Dann ist $p_{K,\alpha}$ eine Seminorm, und

$$\mathscr{P} := \{p_{K,\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, K \subset \Omega,\, K \text{ kompakt}\}$$

erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf $C^\infty(\Omega)$. Versieht man $C^\infty(\Omega)$ mit dieser Topologie, so schreibt man $\mathscr{E}(\Omega)$.

e) Seien X und Y normierte Räume. Dann erzeugt die Familie

$$p_x(T) := \|Tx\| \quad (x \in X),$$

die starke Operatortopologie auf $L(X,Y)$, und

$$p_{x,f}(T) := |f(Tx)| \quad (x \in X, f \in Y')$$

die schwache Operatortopologie auf $L(X,Y)$.

1.6 Definition. a) Seien X, Y $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\langle\cdot|\cdot\rangle : X\times Y \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung. Dann heißt (X,Y) ein duales Paar, falls

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in X\setminus\{0\}\,\exists\, y \in Y : \langle x|y\rangle \neq 0,\\ &\forall\, y \in Y\setminus\{0\}\,\exists\, x \in X : \langle x|y\rangle \neq 0. \end{aligned}$$

b) Sei (X,Y) ein duales Paar. Zu $y \in Y$ definiere die Seminorm $p_y(x) := |\langle x|y\rangle|$. Dann heißt die durch $\mathscr{P} := \{p_y : y \in Y\}$ auf X erzeugte lokalkonvexe Topologie die $\sigma(X,Y)$-Topologie.

1.7 Beispiele. a) Sei X normierter Raum mit topologischem Dualraum X'. Dann ist (X,X') mit $\langle x|x'\rangle := x'(x)$ ein duales Paar, und $\sigma(X,X')$ heißt die schwache Topologie auf X.

Analog ist (X',X) mit $\langle x'|x\rangle := x'(x)$ ein duales Paar, und $\sigma(X',X)$ heißt die schwach-*-Topologie auf X' (Topologie der punktweisen Konvergenz auf X').

b) Sei $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ ein Maßraum. Dann ist $(L^p(\mu),L^q(\mu))$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $\langle f|g\rangle := \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x)$ ein duales Paar. Dabei folgt die Existenz des Integrals aus der Hölderschen Ungleichung.

Im Folgenden sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Raum mit einer Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen.

1.8 Lemma. *Es sind äquivalent:*

(i) $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ *ist Hausdorff-Raum.*

(ii) Zu $x \in X \setminus \{0\}$ *existiert ein* $p \in \mathscr{P}$ *mit* $p(x) \neq 0$.

(iii) Es gibt eine Nullumgebungsbasis τ_0 *mit* $\bigcap_{U \in \tau_0} = \{0\}$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii). Zu $x \neq 0$ wähle Nullumgebungen U und V mit $(x+U) \cap V = \emptyset$. O.E. sei $V = U_{\mathscr{F},r}$ für eine endliche Teilmenge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $r > 0$. Wegen $x \notin V$ gilt $p(x) \neq 0$ für ein $p \in \mathscr{F}$.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii). Es gilt $x \in \bigcap_{U \in \tau_0} U = \bigcap_{\mathscr{F},\varepsilon} U_{\mathscr{F},\varepsilon}$ genau dann, wenn für alle $p \in \mathscr{P}$ gilt $p(x) = 0$.

(iii)$\Longrightarrow$ (i). Sei $x \neq y$. Wähle $U \in \tau_0$ mit $x - y \notin U$. Da $(x, y) \mapsto x - y$ stetig ist, existieren Nullumgebungen V und W mit $W - V \subset U$. Damit ist $(x+V) \cap (y+W) = \emptyset$, denn aus $z \in (x+V) \cap (y+W)$ folgt $x-y = (x-z)-(y-z) \in (x-V)-(y-W) = W - V \subset U$. □

1.9 Lemma. *a) Für eine Seminorm* $q : X \to [0, \infty)$ *sind äquivalent:*

(i) q *ist stetig.*

(ii) q *ist stetig bei 0.*

(iii) $\{x : q(x) \leq 1\} = q^{-1}([0, 1])$ *ist eine Nullumgebung.*

b) Alle $p \in \mathscr{P}$ *sind stetig.*

c) Eine Seminorm q *ist genau dann stetig, wenn* $M \geq 0$ *und* $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{F}$ *endlich, existieren mit* $q(x) \leq M \max_{p \in \mathscr{F}} p(x)$.

Beweis. a) (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ist trivial. (iii) $\Longrightarrow$ (i). Zu $x \in X$, $\varepsilon > 0$ sei $U := \varepsilon q^{-1}([0, 1]) = q^{-1}([0, \varepsilon])$. Dann gilt für $y \in U$

$$|q(x + y) - q(x)| \leq q((x + y) - x) = q(y) \leq \varepsilon,$$

d.h. $q(x + U) \subset [q(x) - \varepsilon, q(x) + \varepsilon]$. Somit ist q stetig.

b) Nach Definition von $\tau_{\mathscr{P}}$ ist $\{x : p(x) \leq 1\}$ für alle $p \in \mathscr{P}$ eine Nullumgebung.

c) Nach a) ist q genau dann stetig, wenn gilt

$$\exists\, \varepsilon > 0, \mathscr{F} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{F} \text{ endlich} : U_{\mathscr{F},\varepsilon} \subset q^{-1}([0,1]).$$

Da $U_{\mathscr{F},\varepsilon} = \{x : \max_{p\in\mathscr{F}} p(x) \le \varepsilon\}$, ist dies äquivalent zu

$$\exists\, \varepsilon > 0, \mathscr{F} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{F} \text{ endlich} : q(x) \le \frac{1}{\varepsilon} \max_{p\in\mathscr{F}} p(x).$$

□

1.10 Korollar. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ lokalkonvex und*

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{Q} \subset \{q : q \textit{ ist } \tau_{\mathscr{P}}\textit{-stetige Seminorm auf } X\}.$$

Dann ist $\tau_{\mathscr{P}} = \tau_{\mathscr{Q}}$.

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 1.9 c). □

1.11 Satz. *Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ lokalkonvex und $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist stetig.

(ii) T ist stetig bei 0.

(iii) Ist $q : Y \to [0,\infty)$ eine stetige Seminorm, so ist $q \circ T : X \to [0,\infty)$ eine stetige Seminorm.

(iv) Für alle $q \in \mathscr{Q}$ existiert ein endliches $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ und $M \ge 0$ so dass $q(Tx) \le M \max_{p\in\mathscr{F}} p(x) \quad (x \in X)$.

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) wie im normierten Fall.

(i)$\Longrightarrow$(iii) klar als Komposition stetiger Funktionen.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) nach Lemma 1.9 b) und c).

(iv)$\Longrightarrow$(ii). Sei $V = \{y : q_i(y) \le \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\}$ eine Nullumgebung in Y. Wähle $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{P}$ und $M_i > 0$ zu q_i nach (iv) und setze $\mathscr{F} := \bigcup_{i=1}^n \mathscr{F}_i$, $M := \max_i M_i$. Dann ist $\max_{i=1,\ldots,n} q_i(Tx) \le M \max_{p\in\mathscr{F}} p(x)$, d.h. $T(U_{\mathscr{F},\varepsilon/M}) \subset V$. Somit ist T stetig bei 0. □

1.12 Korollar. *Eine lineare Abbildung $\ell : X \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn es endlich viele $p_1, \dots, p_n \in \mathscr{P}$ und $M \geq 0$ gibt mit*

$$|\ell(x)| \leq M \max_{i=1,\dots,n} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Beweis. Das ist Satz 1.12 mit $(Y, \tau_Q) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$ (d.h. $\mathscr{Q} = \{|\cdot|\}$). □

1.13 Definition. Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ lokalkonvex. Definiere

$$L(X,Y) := \{T \colon X \to Y \,|\, T \text{ linear, stetig}\}.$$

Wir setzen $X' := L(X, \mathbb{K})$ und $L(X) := L(X,X)$.

1.14 Satz. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist metrisierbar (d.h. es existiert eine Metrik d auf $X \times X$, welche die Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt), wobei die Metrik translationsinvariant definiert werden kann.

(ii) 0 besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.

(iii) $\tau_{\mathscr{P}}$ wird bereits durch abzählbar viele Seminormen erzeugt.

Dabei ist eine Metrik d translationsinvariant, falls gilt

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad (x,y,z \in X).$$

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) gilt allgemein in metrischen Räumen.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Sei $B = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis. Dann existieren $U_{\mathscr{F}_n, \varepsilon_n} \in \tau_0$ mit $U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} \subset U_n$, und $\{U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbare Umgebungsbasis. Dann erzeugt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n \subset \mathscr{P}$ bereits die Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Sei $\mathscr{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definiere $d(x,y) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$. Dann gilt $0 \leq d(x,y) \leq 1$. Man rechnet direkt nach, dass d eine Metrik ist und $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt. □

1.15 Definition. a) (Cauchyfolge) Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Umgebungsbasis der 0. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchyfolge, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - x_m \in U_\alpha \quad (n,m \geq n_0)$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent gegen $x \in X$, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - x \in U_\alpha$ $(n \geq n_0)$.

(X, τ) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

b) Ein lokalkonvexer Raum $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ heißt Fréchet-Raum, falls $\tau_{\mathscr{P}}$ durch eine translationsinvariante Metrik induziert wird und falls X vollständig ist.

1.16 Lemma. *a) Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, falls $p(x_n - x) \to 0\,(n \to \infty)$ für alle $p \in \mathscr{P}$ gilt.*

b) Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ metrisierbare lokalkonvexe Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn gilt:

$$\big[\forall\, p \in \mathscr{P} : p(x_n - x) \to 0\,(n \to \infty)\big] \Rightarrow \big[\forall\, q \in \mathscr{Q} : q(f(x_n) - f(x)) \to 0\,(n \to \infty)\big].$$

Beweis. a) Sei $U_{\mathcal{F},\varepsilon} \in \tau_0$, $\mathcal{F} = \{p_1, \dots, p_N\}$. Falls $p(x_n - x) \to 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$, so existiert zu jedem $j = 1, \dots, N$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit $p_j(x - x_n) < \varepsilon$ $(n \geq n_j)$. Für $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_N\}$ folgt $x_n - x \in U_{\mathcal{F},\varepsilon}$. Also gilt $x_n \to x$ bzgl. $\tau_{\mathscr{P}}$.

Es gelte nun $x_n \to x$ bzgl. $\tau_{\mathscr{P}}$. Sei $p \in \mathscr{P}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x \in U_{\{p\},\varepsilon}$ $(n \geq n_0)$, d.h. es gilt $p(x_n - x) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Somit folgt $p(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

b) In metrischen Räumen ist die Stetigkeit äquivalent zur Folgenstetigkeit. □

1.17 Bemerkung. Die Aussage in Lemma 1.16 b) gilt nicht mehr, falls die Räume nicht metrisierbar sind. Um eine analoge Aussage zu erhalten, muss der Folgenbegriff durch den Begriff des Netzes ersetzt werden, der hier nicht näher diskutiert werden soll. Man erhält folgende Aussage: Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen lokalkonvexen Räumen $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ ist genau dann stetig, falls für alle Netze $(x_i)_{i\in I} \subset X$ mit $p(x - x_i) \to 0$ $(p \in \mathscr{P})$ folgt: $q(f(x_i) - f(x)) \to 0$ $(q \in \mathscr{Q})$.

2. Räume von Distributionen

Worum geht's? Distributionen sind uns schon aus der Funktionalanalysis bekannt. Hier werden die wichtigsten Begriffe wiederholt und vertieft, wobei die Ergebnisse aus dem ersten Abschnitt über lokalkonvexe Räume nützlich sind. Für spätere Verwendung, speziell im Bereich der partiellen Differentialgleichungen, werden hier gleich vektorwertige Distributionen betrachtet (d.h. Testfunktionen und Distributionen, deren Werte in einem Banachraum liegen). Eine wichtige Teilklasse der Distributionen sind die temperierten Distributionen, welche für die Fourier-Transformation nützlich sind.

a) Der Raum $\mathscr{D}'(\Omega, E)$ der Distributionen

2.1 Definition (Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen)**.** Seien X und Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $f\colon U \to Y$ eine Abbildung, und $x_0 \in U$.

a) Dann heißt f Fréchet-differenzierbar an der Stelle x_0, falls ein $A(x_0) \in L(X, Y)$ existiert mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_X} \big\| f(x_0 + h) - f(x_0) - A(x_0)h \big\|_Y = 0.$$

In diesem Fall heißt $f'(x_0) := A(x_0)$ die (Fréchet-)Ableitung von f an der Stelle x_0.

Die Funktion f heißt stetig differenzierbar in U, falls die Ableitung für alle $x_0 \in U$ existiert und die Abbildung $x_0 \mapsto A(x_0)$, $U \to L(X, Y)$ stetig ist. Man schreibt $f \in C^1(U, Y)$. Analog werden höhere Ableitungen definiert.

b) Sei $v \in X$. Falls der Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \in Y$$

existiert, heißt $D_v f(x_0)$ die Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v. Falls $D_v f(x_0)$ für alle $v \in X$ existiert und die Abbildung $X \to Y$, $v \mapsto D_v f(x_0)$ stetig ist, heißt f Gâteaux-differenzierbar an der Stelle x_0. Speziell für $X = \mathbb{R}^n$ und $v = e_j$ (j-ter Einheitsvektor) heißt $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0) := D_{e_j} f(x_0)$ die j-te partielle Ableitung von f an der Stelle x_0.

2.2 Bemerkung. Man sieht sofort, dass für $f \in C^1(U, E)$ alle Richtungsableitungen $D_v f(x_0)$ existieren und $D_v f(x_0) = f'(x_0)v$ ($v \in X$) gilt. Speziell existieren für $f \in C^\infty(\Omega, E)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen alle partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f\colon \Omega \to E$.

Im Folgenden seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum. Wir schreiben $K \subset\subset \Omega$, falls $K \subset \Omega$ kompakt ist.

2.3 Definition. a) Der Raum der Testfunktionen auf Ω wird definiert als

$$\mathscr{D}(\Omega, E) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega, E) : \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \text{ kompakt}\}.$$

Für $K \subset\subset \Omega$ sei $\mathscr{D}_K(\Omega, E) := \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, E) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$.

b) Man definiert die Halbnorm

$$p_{N,K}(\varphi) := \sup_{x\in K} \max_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_E \quad (N \in \mathbb{N}_0,\ K \subset\subset \Omega).$$

Dann wird $\mathscr{D}_K(\Omega)$ durch $\mathscr{P}_K := \{p_{N,K} : N \in \mathbb{N}_0\}$ zu einem lokalkonvexen Raum $(\mathscr{D}_K(\Omega), \tau_K)$.

Durch

$$\mathscr{P} := \{p\colon \mathscr{D}(\Omega, E) \to [0,\infty) : p \text{ Seminorm}, p|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} \text{ stetig bzgl. } \tau_K\}$$

wird auch $\mathscr{D}(\Omega, E)$ zu einem lokalkonvexen Raum. Wir schreiben $(\mathscr{D}(\Omega, E), \tau_{\mathscr{P}})$.

Im Fall $E = \mathbb{K}$ schreibt man $\mathscr{D}(\Omega)$ bzw. $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

2.4 Bemerkung. Eine zunächst natürlich scheinende Wahl für die lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{D}(\Omega, E)$ wäre $\widetilde{\mathscr{P}} := \{p_{N,K}\colon K \subset\subset \Omega,\ N \in \mathbb{N}_0\}$. Man beachte, dass für festes $K \subset\subset \Omega$ und $\varphi \in \mathscr{D}_L(\Omega, E)$ mit $L \subset\subset \Omega$ gilt

$$p_{N,K}(\varphi) = \max_{x\in K\cap L} \max_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_E \le p_{N,L}(\varphi).$$

Nach Lemma 1.9 c) ist daher $p_{N,K}|_{\mathscr{D}_L(\Omega,E)}$ stetig, d.h. es gilt $\widetilde{\mathscr{P}} \subset \mathscr{P}$. Durch die größere Wahl von $\mathscr{P}$ werden mehr Abbildungen stetig, was es uns später (Lemma 2.6 d)) erlauben wird, die Stetigkeit einfach zu beschreiben.

2.5 Lemma. *Der Raum $(\mathscr{D}_K(\Omega, E), \tau_K)$ ist ein Fréchetraum.*

Beweis. Da $p_{0,K}$ bereits eine Norm ist, ist $\mathscr{D}_K(\Omega, E)$ ein Hausdorff-Raum, und die Abzählbarkeit von $\mathscr{P}_K$ liefert die Metrisierbarkeit. Somit ist nur noch die Vollständigkeit zu zeigen.

Wir wählen folgende Umgebung der 0:

$$U_N := \Big\{\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega, E) : p_{N,K}(\varphi) < \frac{1}{N}\Big\}.$$

Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_K(\Omega, E)$ eine Cauchyfolge. Zu $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_n - \varphi_m \in U_N \quad (n, m \ge n_0),$$

d.h. $\sup_{x\in K} \|\partial^\alpha\varphi_n(x) - \partial^\alpha\varphi_m(x)\|_E < \frac{1}{N} \quad (|\alpha| \le N, n, m \ge n_0)$. Da E vollständig ist, konvergiert $(\partial^\alpha\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen eine Funktion f_α. Es gilt $\varphi_n \to \varphi := f_0$ und $\partial^\alpha\varphi_n \to f_\alpha = \partial^\alpha\varphi$. Somit $p_N(\varphi_n - \varphi) \to 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d.h. $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}_K(\Omega, E)$ (Korollar 1.16). □

2.6 Lemma. *a) Die Relativtopologie von $\tau_{\mathscr{P}}$ auf $\mathscr{D}_K(\Omega, E)$ stimmt mit τ_K überein.*

b) $\mathscr{D}_K(\Omega, E)$ ist $\tau_{\mathscr{P}}$-abgeschlossen in $\mathscr{D}(\Omega, E)$.

c) $(\mathscr{D}(\Omega, E), \tau_{\mathscr{P}})$ ist Hausdorff-Raum.

d) Sei Y lokalkonvex und $L : \mathscr{D}(\Omega, E) \to Y$ linear. Dann ist L genau dann $\tau_{\mathscr{P}}$-stetig, wenn alle $L|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)}$ τ_K-stetig sind.

Beweis. a) Nach Definition wird die Relativtopologie von der Familie von Seminormen

$$\mathscr{Q} := \{p|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)} : p \in \mathscr{P}\}$$

erzeugt. Es gilt

$$\{p_{N,K} : N \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{Q} \subset \{q : q \text{ ist } \tau_K\text{-stetige Seminorm }\}$$

und damit ist nach Korollar 1.10 $\tau_{\mathscr{Q}} = \tau_K$.

b) ist klar nach a) und Lemma 2.5.

c) Sei $\varphi \neq 0$. Dann existiert ein $x \in \Omega$ mit $\varphi(x) \neq 0$ und daher $p_{0,\{x\}}(\varphi) \neq 0$. Wegen $p_{0,\{x\}} \in \mathscr{P}$ und Lemma 1.8 ist $\mathscr{D}(\Omega, E)$ ein Hausdorff-Raum.

d) (i) Sei L $\tau_{\mathscr{P}}$-stetig. Dann ist $L|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)}$ τ_K-stetig nach a).

(ii) Sei q eine stetige Seminorm auf Y. Dann ist $q \circ L|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)}$ eine stetige Seminorm auf $\mathscr{D}_K(\Omega, E)$ für alle Kompakta K, d.h. $q \circ L \in \mathscr{P}$. Damit ist $q \circ L$ $\tau_{\mathscr{P}}$-stetig. Nach Satz 1.11 ist L $\tau_{\mathscr{P}}$-stetig. □

2.7 Satz. *Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega, E)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega, E)$.

(ii) Es existiert ein Kompaktum $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\sup_{x\in K} \|\partial^\alpha \varphi_n(x)\|_E \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Beweis. (ii) heißt $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(\Omega, E)$ und $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}_K(\Omega, E)$. Damit ist (ii)$\Longrightarrow$(i) trivial.

(i)$\Longrightarrow$(ii). Sei $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega, E)$. Angenommen, es existiert kein K wie in (ii). Dann existiert eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen mit $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{K}_n = \Omega$ und eine Teilfolge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\psi_n \in \mathscr{D}_{K_n}(\Omega, E) \setminus \mathscr{D}_{K_{n-1}}(\Omega, E).$$

Dabei bezeichne $\mathring{K}_n$ das Innere der Menge K_n. Eine solche Folge kompakter Mengen kann man etwas als geeignete Teilfolge der Mengen $\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k}, |x| \leq k\}$ wählen. Wähle $x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$ mit $r_n := |\psi_n(x_n)| > 0$. Dann ist $\pi_n : \varphi \mapsto \frac{1}{r_n}|\varphi(x_n)|$, $\mathscr{D}(\Omega, E) \to [0, \infty)$, stetig (siehe Beweis von Lemma 2.6).

Jedes kompakte $K \subset \Omega$ liegt in einem der K_n wegen $\bigcup_n \mathring{K}_n = \Omega$. Also ist $\mathscr{D}(\Omega, E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_{K_n}(\Omega, E)$. Es gilt $\pi_n|_{\mathscr{D}_{K_m}(\Omega,E)} = 0$ für $n > m$. Daher ist

$$\pi(\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi_n(\varphi)$$

für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega, E)$ eine endliche Summe, und damit π eine wohldefinierte Seminorm. Es gilt

$$\pi|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)} = \sum_{n=1}^{N} \pi_n|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)} \qquad \text{falls } K \subset K_N.$$

Somit ist $\pi \in \mathscr{P}$ und insbesondere τ-stetig. Es gilt $\pi(\psi_n) \geq \pi_n(\psi_n) = 1$. Aber wegen $\varphi_n \to 0$ gilt auch $\pi(\psi_n) \to \pi(0) = 0$, Widerspruch. □

2.8 Korollar. *Sei Y metrisierbarer lokalkonvexer Raum und $L\colon \mathscr{D}(\Omega, E) \to Y$ linear. Dann ist L genau dann stetig, wenn für jede Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega, E)$ mit $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega, E)$ gilt: $L\varphi_n \to 0$ in Y.*

Beweis. Nach Lemma 2.6 ist L genau dann stetig, wenn alle $L|_{\mathscr{D}_K(\Omega,E)}$ stetig bzgl. τ_K sind. Da τ_K und Y metrisierbar sind, ist diese Stetigkeit äquivalent zur Folgenstetigkeit, und da L linear ist, ist dies äquivalent zur Folgenstetigkeit an der Stelle 0. □

2.9 Bemerkung. Man kann zeigen, dass auch in $\mathscr{D}(\Omega, E)$ jede Cauchyfolge konvergiert. Allerdings ist $\mathscr{D}(\Omega, E)$ nicht metrisierbar und damit kein Fréchetraum.

2.10 Definition. Der Raum der Distributionen auf Ω wird definiert durch

$$\mathscr{D}'(\Omega, E) := L(\mathscr{D}(\Omega), E) = \{u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to E : u \text{ stetig, linear}\}.$$

Durch die Familie von Seminormen

$$p_\varphi(u) := \|u(\varphi)\|_E \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

wird $\mathscr{D}'(\Omega, E)$ zu einem lokalkonvexen Raum.

2.11 Bemerkung. a) Man beachte, dass $\mathscr{D}'(\Omega, E)$ nicht als topologischer Dualraum von $\mathscr{D}(\Omega, E)$ definiert wird.

b) Im Fall $E = \mathbb{K}$ ist $\mathscr{D}'(\Omega) = L(\mathscr{D}(\Omega), \mathbb{K})$ (topologischer Dualraum), und $(\mathscr{D}'(\Omega), \mathscr{D}(\Omega))$ ist mit $\langle u|\varphi\rangle := u(\varphi)$ ein duales Paar. In diesem Fall ist die oben definierte Topologie auf $\mathscr{D}'(\Omega)$ die schwach-*-Topologie.

2.12 Korollar. *Sei $u : \mathscr{D}(\Omega) \to E$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) $u \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$.

(ii) Für alle Kompakta $K \subset \Omega$ ist $u|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} : \mathscr{D}_K(\Omega) \to E$ stetig.

(iii) Für alle Kompakta $K \subset \Omega$ existieren $N \in \mathbb{N}_0$, $c > 0$ mit

$$\|u(\varphi)\|_E \le c p_N(\varphi) = c \max_{|\alpha|\le N} \max_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)).$$

(iv) Gilt $\varphi_k \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, so gilt $u(\varphi_k) \to 0$ in E.

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) nach Lemma 2.6.

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) nach Satz 1.11.

(i)$\Longleftrightarrow$(iv) nach Korollar 2.8. □

2.13 Definition. Sei $u \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$.

a) $\operatorname{ord} u := \inf\{n \in \mathbb{N} : \forall K \subset\subset \Omega\, \exists c_K > 0 : \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : \|u(\varphi)\|_E \le c_K p_{n,K}(\varphi)\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt die Ordnung von u.

b) Sei $U \subset \Omega$ offen. Die Distribution u verschwindet auf U, falls $u(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ gilt. Die Menge

$$\operatorname{supp} u := \Omega \setminus \bigcup \{U \subset \Omega : u \text{ verschwindet auf } U\}$$

heißt der Träger von u.

2.14 Beispiel. Sei $x_0 \in \Omega$. Für die Dirac-Distribution $\delta_{x_0} : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(x_0)$, gilt

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| \le p_{0,K}(\varphi) = \max_{x\in K} |\varphi(x)|,$$

also ist $\operatorname{ord} \delta_{x_0} = 0$.

Sei $U \subset \Omega$ offen. Dann ist $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$. Also ist $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{0\}$.

Für $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $u(\varphi) := (\partial^\alpha \varphi)(x_0)$ gilt analog $\operatorname{ord} u = |\alpha|$ und $\operatorname{supp} u = \{x_0\}$.

2.15 Definition und Satz. *Für $u \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setze*

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

Dann ist $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$. Es gilt $\partial^\alpha \in L(\mathscr{D}(\Omega, E))$ und $\partial^\alpha \in L(\mathscr{D}'(\Omega, E))$ (d.h. insbesondere ist ∂^α stetig bzgl. der entsprechenden lokalkonvexen Topologien).

Beweis. Wegen $p_{N,K}(\partial^\alpha \varphi) \le P_{N+|\alpha|,K}(\varphi)$ ist $\partial^\alpha \colon \mathscr{D}_K(\Omega, E) \to \mathscr{D}_K(\Omega, E)$ stetig für alle $K \subset\subset \Omega$. Mit Lemma 2.6 a) folgt die Stetigkeit von $\partial^\alpha \colon \mathscr{D}_K(\Omega, E) \to \mathscr{D}(\Omega, E)$, und nach Lemma 2.6 d) ist $\partial^\alpha \colon \mathscr{D}(\Omega, E) \to \mathscr{D}(\Omega, E)$ stetig, d.h. $\partial^\alpha \in L(\mathscr{D}(\Omega, E))$.

Wendet man dies auf den skalaren Fall an, so sieht man, dass $\partial^\alpha u = (-1)^{|\alpha|} u \circ \partial^\alpha \colon \mathscr{D}(\Omega) \to E$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, d.h. $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$.

Für die Stetigkeit in $\mathscr{D}'(\Omega, E)$ rechnen wir die Bedingungen aus Satz 1.11 (iv) mit $X = Y = \mathscr{D}'(\Omega, E)$ nach. Beachte, dass hier die Familie von Seminormen durch $\mathscr{P} = \mathscr{Q} = \{p_\varphi : \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\}$ mit $p_\varphi(u) = \|u(\varphi)\|_E$ gegeben ist. Es gilt

$$p_\varphi(\partial^\alpha u) = \|(\partial^\alpha u)(\varphi)\|_E = \|u(\partial^\alpha \varphi)\|_E = p_{\partial^\alpha \varphi}(u),$$

also ist wegen $\partial^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ Satz 1.11 (iv) erfüllt, und $\partial^\alpha \in L(\mathscr{D}'(\Omega, E))$. □

b) Der Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ der temperierten Distributionen

2.16 Definition. a) Der Schwartz-Raum (Raum der schnell fallenden Funktionen) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ ist definiert als die Menge aller $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ mit

$$p_{\alpha,m}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_E < \infty \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, m \in \mathbb{N}_0).$$

Durch $\{p_{\alpha,m} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, m \in \mathbb{N}_0\}$ wird eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ definiert.

b) Der Raum der temperierten Distributionen wird definiert als $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E) := L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), E)$. Durch die Familie $p_\varphi(u) := \|u(\varphi)\|_E$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wird $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ zu einem lokalkonvexen Vektorraum.

2.17 Bemerkung. a) Eine äquivalente Familie von Seminormen für $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ ist etwa $\{p_{N,m} : N, m \in \mathbb{N}_0\}$ mit $p_{N,m}(\varphi) := \max_{|\alpha| \le N} p_{\alpha,m}(\varphi)$.

b) Für $E = \mathbb{C}$ ist die obige Topologie auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wieder die schwach-*-Topologie.

2.18 Satz. *a) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ ist ein Fréchetraum.*

b) Seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist jede der Abbildungen $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$, $\varphi \mapsto P \cdot \varphi$ und $\varphi \mapsto f \cdot \varphi$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ nach $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$.

Beweis. a) Da die Menge der Seminormen abzählbar ist, ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ metrisierbar. Die Vollständigkeit folgt wie im Beweis von Lemma 2.5.

b) Dass $\partial^\alpha \varphi, P\varphi$ und $f\varphi$ wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ liegen, folgt aus der Leibniz-Formel

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta g).$$

Die Stetigkeit folgt ebenfalls unter Verwendung der Leibniz-Formel wie in Satz 2.15. □

2.19 Satz. *a) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$ ist dicht in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$.*

b) Die Inklusion $j\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$, $\varphi \mapsto \varphi$, ist stetig.

Beweis. a) Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$. Wähle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x) = 1\,(|x| \leq 1)$ und definiere $f_\varepsilon(x) := \varphi(\varepsilon x) f(x)\,(x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0)$. Dann ist $f_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$, und für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\begin{aligned}(1 + |x|^m)\partial^\alpha (f - f_\varepsilon)(x) &= (1 + |x|^m)\partial^\alpha \big[(1 - \varphi(\varepsilon x)) f(x)\big]\\ &= (1 + |x|^m) \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} e^{|\alpha|} [\partial^\alpha (1 - \varphi)](\varepsilon x)(\partial^\beta f)(x).\end{aligned}$$

Wegen $[\partial^\beta (1 - \varphi)](\varepsilon x) = 0$ für $|x| \leq \varepsilon^{-1}$ und

$$\sup_{|x| > \varepsilon^{-1}} (1 + |x|^m)\|\partial^\beta f(x)\|_E \to 0 \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

folgt $p_{\alpha,m}(f - f_\varepsilon) \to 0\,(\varepsilon \searrow 0)$, d.h. $f_\varepsilon \to f$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$.

b) Für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist $j\colon (\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n, E), \tau_K) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ stetig, da auf $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n, E)$ die Topologien von $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n, E)$ und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ übereinstimmen. Nach Lemma 2.6 ist j stetig. □

2.20 Definition. Seien X, Y lokalkonvexe Räume. Wir schreiben $X \hookrightarrow Y$, falls ein injektives $j \in L(X, Y)$ existiert (stetige Einbettung), und $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$, falls zusätzlich $j(X) \subset Y$ dicht ist.

Satz 2.19 besagt damit $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$.

2.21 Lemma. *Seien X, Y lokalkonvexe Räume und $T \in L(X, Y)$. Definiere die „E-wertigen Dualräume“ $X'_E := L(X, E)$ bzw. $Y'_E := L(Y, E)$ mit den durch $\{p_\varphi : \varphi \in X\}$, $p_\varphi(u) := \|u(\varphi)\|_E$ gegebenen lokalkonvexen Topologien. Für den „E-wertigen adjungierten Operator“ $T'\colon Y'_E \to X'_E$, $u \mapsto u \circ T$ gilt dann $T' \in L(Y'_E, X'_E)$. Falls $R(T) \subset Y$ dicht ist, so ist T' injektiv.*

Beweis. Dies sieht man wie im Beweis von Satz 2.15: $T'u = u \circ T \in X'_E$ als Komposition stetiger Abbildungen, und die Gleichheit

$$p_\varphi(T'_E u) = \|(T'_E u)(\varphi)\|_E = \|u(T\varphi)\|_E = p_{T\varphi}(u)$$

zeigt die Stetigkeit von T'.

Sei nun $R(T) \subset Y$ dicht und $u \in \ker T'$. Dann gilt $u(T\varphi) = (T'u)(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in X$. Da $R(T)$ dicht ist, folgt $u(\psi) = 0$ für alle $\psi \in Y$, d.h. $u = 0$ in Y'_E. □

2.22 Satz. *a) Es gilt $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n, E)$, wobei die Einbettung gegeben ist durch $u \mapsto u|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}$.*

b) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, P Polynom und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sind die Abbildungen $u \mapsto \partial^\alpha u$, $u \mapsto Pu$ und $u \mapsto fu$ Elemente von $L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E))$. Dabei wird $(Pu)(\varphi) := u(P\varphi)$ bzw. $(fu)(\varphi) := u(f\varphi)$ definiert.

Beweis. a) folgt sofort aus Satz 2.19 und Lemma 2.21 mit $j^*\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n, E)$. Beachte $j^*u = u \circ j = u|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}$.

b) folgt ebenfalls mit Lemma 2.21 aus Satz 2.18. □

3. Integration vektorwertiger Funktionen

Worum geht's? In vielen Anwendungen wie etwa in der Theorie partieller Differentialgleichungen und der Halbgruppentheorie, treten in natürlicher Weise Integrale über vektorwertige Funktionen auf, d.h. die Integranden haben Werte in normierten Räumen bzw. Banachräumen. Hier soll der zugehörige Integralbegriff diskutiert werden, der eine Verallgemeinerung des skalarwertigen Lebesgue-Integrals darstellt. Besondere Bedeutung haben - wie im skalaren Fall - die L^p-Räume.

Im Folgenden sei $(E, \|\cdot\|_E) = (E, \|\cdot\|)$ wieder ein $\mathbb{K}$-Banachraum, versehen mit der Borel-σ-Algebra, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

3.1 Definition. Eine Funktion $f\colon \Omega \to E$ heißt Stufenfunktion oder Treppenfunktion, falls f die Form $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ und $a_i \in E \quad (i = 1, \dots, n)$ besitzt. Falls zusätzlich $\mu(A_i) < \infty$ $(i = 1, \dots, n)$ gilt, heißt s (μ-)integrierbar. Der Raum aller integrierbaren Stufenfunktionen wird mit $T(\mu, E)$ bezeichnet. Für $f \in T(\mu, E)$ ist das (Bochner-)Integral von f bzgl. μ definiert als

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in E.$$

3.2 Bemerkung. a) Offensichtlich ist $T(\mu, E)$ ein linearer Vektorraum. Falls $f \in T(\mu, E)$, so ist $\|f(\cdot)\|_E \in T(\mu, \mathbb{R})$.

b) Es gilt

$$\Big\| \int f d\mu \Big\|_E \le \int \|f\|_E d\mu \quad (s \in T(\mu, E)).$$

c) Durch $\|f\|_{T(\mu,E)} := \int \|f\|_E d\mu$ wird eine Seminorm auf $T(\mu, E)$ definiert.

Im folgenden werden wir öfter Folgen und Reihen von Funktionen mit endlichem oder separablem Wertebereich betrachten. Um zu sehen, dass die Separabilität des Wertebereichs erhalten bleibt, verwenden wir folgende Aussage.

3.3 Lemma. *a) Sei (Y, d) ein separabler metrischer Raum und $X \subset Y$. Dann ist $(X, d|_X)$ separabel.*

b) Sei E ein Banachraum, Ω eine Menge, $f_n\colon \Omega \to E$ mit $f_n(\Omega)$ separabel. Die Reihe $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ konvergiere für alle $x \in \Omega$. Dann ist $f(\Omega)$ separabel.

Beweis. a) Sei $Y = \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Definiere

$$U := \{U_{r,n} := B(y_n, r) \cap X : r > 0,\ r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zu jedem $U_{r,n} \neq \emptyset$ wähle ein $x_{r,n} \in U_{r,n}$. Dann ist $A := \{x_{r,n} : r, n\}$ abzählbar.

Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $r \in \mathbb{Q}, r < \varepsilon$ und y_n mit $d(x, y_n) < \frac{r}{2}$. Wegen $x \in B(y_n, r/2)$ ist $X \cap B(y_n, r/2) \neq \emptyset$. Somit ist $d(x, x_{r/2,n}) \leq d(x, y_n) + d(y_n, x_{r/2,n}) < r < \varepsilon$.

b) Sei $f_n(\Omega) = \overline{\{y_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}}$ und

$$Z := \Big\{ \sum_{i=1}^{N} y_{n_i,k_i} : n_i, k_i \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Dann ist Z abzählbar. Sei $x \in \Omega$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle ein k_n mit $\|f_n(x) - y_{n,k_n}\| < \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Dann ist für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} y_{n,k_n}}_{\in Z} \Big\| < \varepsilon,$$

d.h. $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \in \overline{Z}$. Da die Partialsummen gegen $f(x)$ konvergieren, ist auch $f(x) \in \overline{Z}$.

Also gilt $f(\Omega) \subset \overline{Z}$, und nach Teil a) ist $f(\Omega)$ separabel. □

3.4 Satz. *Sei $f : \Omega \to E$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n : \Omega \to E$ mit $f_n(x) \to f(x)$ (in E) für alle $x \in \Omega$.

(ii) f ist messbar und $f(\Omega)$ ist separabel.

Man kann in (i) $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\| \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \Omega)$ wählen.

Beweis. (i)$\Rightarrow$ (ii) Als punktweiser Limes messbarer Funktionen ist f messbar. Wie im Beweis von Lemma 3.3 sieht man, dass $f(\Omega)$ separabel ist.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sei $\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(\Omega)$ dicht. Ohne Einschränkung seien alle w_n verschieden von 0. Setze für $n, N \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{A}_n^N := \Big\{ x \in \Omega : \|f(x)\| \geq \frac{1}{N}, \|f(x) - w_n\| < \frac{1}{N} \Big\}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{A}_n^N = \Big\{ z \in \Omega : \|f(x)\| \geq \frac{1}{N} \Big\},$$

da $\{w_n\}_n$ dicht ist. Sei

$$A_n^N := \widetilde{A}_n^N \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \widetilde{A}_k^N \quad (n \in \mathbb{N})$$

(disjunkte Version), und für $N \in \mathbb{N}$ und $M = 1, \dots, N$ definiere

$$g_{N,M}(x) := \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n^M}(x) w_n.$$

Dann ist $g_{N,M}$ Stufenfunktion und es gilt $\|g_{N,M}(x)\| \le 2\|f(x)\|$ $(x \in \Omega)$ wegen

$$\|g_{N,M}(x)\| = \|w_n\| \le \frac{1}{M} + \|f(x)\| \le 2\|f(x)\| \quad (x \in A_n^M).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ setze nun $f_N(x) := 0$, falls $g_{N,M}(x) = 0$ $(M = 1, \dots, N)$ und $f_N(x) := g_{N,M}(x)$ sonst, wobei

$$M := \max\{k = 1, \dots, N : g_{N,k}(x) \neq 0\}.$$

Dann ist auch f_N Stufenfunktion, und $\|f_N(x)\| \le 2\|f(x)\|$ $(x \in \Omega)$. Aufgrund der Definition von $g_{N,M}$ und f_N gilt außerdem für $N \in \mathbb{N}$:

(*) Falls $x \in \bigcup_{M=1}^N \bigcup_{n=1}^N A_n^M$, so ist $f_N(x) \neq 0$ und

$$\|f_N(x) - f(x)\| \le \frac{1}{M_0^N}$$

mit $M_0^N := \max\{M = 1, \dots, N : x \in \bigcup_{n=1}^N A_n^M\}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in \Omega$. Falls $f(x) = 0$, so folgt $\chi_{A_n^M}(x) = 0$ für alle $M, n \in \mathbb{N}$ und damit $f_N(x) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei also $f(x) \neq 0$. Wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N_0} < \min\{\|f(x)\|, \varepsilon\}$. Dann existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n_0}^{N_0}$. Für $N \ge \max\{N_0, n_0\}$ folgt $x \in \bigcup_{M=1}^N \bigcup_{n=1}^N A_n^M$ und $M_0^N \ge N_0$. Nach (*) erhalten wir

$$\|f_N(x) - f(x)\| < \frac{1}{M_0^N} \le \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad (N \ge \max\{N_0, n_0\}).$$

Somit konvergiert $f_N(x)$ gegen $f(x)$. □

3.5 Satz. *Sei $f\colon \Omega \to E$ messbar und $f(\Omega)$ separabel. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(\mu, E)$ mit $f_n(x) \to f(x)$ $(x \in \Omega)$, und

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Beweis. (i)⇒(ii). Es gilt

$$\int \|f\| d\mu \le \int \|f_n - f\| d\mu + \int \|f_n\| d\mu < \infty$$

mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(ii)⇒(i). Wähle eine Folge $(f_n)_n$ von Stufenfunktionen wie in Satz 3.4, wobei $\|f_n(x)\| \le 2\|f(x)\| \quad (x \in \Omega)$. Insbesondere ist f_n integrierbar. Damit gilt

$$g_n(x) := \|f_n(x) - f(x)\| \to 0,\ n \to \infty \quad (x \in \Omega)$$

und $g_n(x) \le 3\|f(x)\| \quad (x \in \Omega)$, d.h. $g_n \to 0$ punktweise, und nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\int g_n d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

3.6 Lemma. *Sei f messbar, $f(\Omega)$ separabel, $\int \|f\| d\mu < \infty$. Seien $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ Folgen wie in Satz 3.4 (i). Falls E Banachraum ist, so existieren $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in E$ und $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \in E$, und beide Limiten sind gleich.*

Beweis. Es gilt mit Bemerkung 3.2

$$\begin{aligned} \Big\| \int f_n d\mu - \int g_n d\mu \Big\| &= \Big\| \int (f_n - g_n) d\mu \Big\| \\ &\le \int \|f_n - g_n\| d\mu \\ &\le \int \big(\|f_n - f\| + \|f - g_n\|\big) d\mu \\ &\to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung mit f_n, f_m statt f_n, g_n zeigt, dass $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Cauchyfolge und damit konvergent ist. □

3.7 Bemerkung. In der Situation von Lemma 3.6 nennt man die Funktion f integrierbar und definiert $\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. Dieses ist nach Lemma 3.6 wohldefiniert und linear in f. Wie üblich übertragen sich die Eigenschaften des Integrals von Stufenfunktionen auf integrierbare Funktionen. Insbesondere gilt

$$\Big\| \int f d\mu \Big\| \le \int \|f\| d\mu$$

falls f integrierbar ist. Dies zeigt, dass sich der Wert des Integrals nicht ändert, falls f auf einer μ-Nullmenge geändert wird. Daher verwendet man folgende leicht allgemeinere Definition.

3.8 Definition. a) Eine Funktion $f\colon \Omega \to E$ heißt stark messbar (oder μ-messbar), falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert so, dass $f|_{\Omega\setminus N}$ messbar ist und $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.

b) Eine stark messbare Funktion $f\colon \Omega \to E$ heißt (μ-)integrierbar, falls $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mu, E)$ mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\int \|f_n - f\| d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ und definert das Bochner-Integral von f über Ω bzgl. μ durch

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Wie üblich sei

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Man setzt $\mathscr{L}^1(\mu, E) := \{f\colon \Omega \to E \,|\, f \text{ ist integrierbar}\}$ und $\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{K})$.

3.9 Satz. *a) (Satz von der majorisierten Konvergenz). Seien $f_n\colon \Omega \to E$ messbar, $f_n(\Omega)$ separabel, $f_n \to f$ μ-fast überall. Sei $g\colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $\int g d\mu < \infty$ und $\|f_n(x)\| \le g(x)$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(x)\| \le g(x)$ μ-fast überall.*

Dann ist $f_n \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$, $f \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$ und

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \text{ in } E \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $f_n\colon \Omega \to E$ messbar, $f_n(\Omega)$ separabel, $\sum_{n=1}^\infty \int \|f_n\| d\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ konvergiert in E für μ-fast alle $x \in \Omega$.

Die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty f_n(x), & \text{falls } \sum_n f_n(x) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$ und $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (d.h. disjunkte Vereinigung) mit $A_n \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f d\mu.$$

Beweis. a) Genauso wie im Beweis von Satz 3.5 sieht man, dass $f_n, f \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$. Wegen $\|f_n - f\| \to 0$ punktweise und $\|f_n - f\| \leq 2g$ folgt

$$\Big\| \int (f_n - f) d\mu \Big\|_E \leq \int \|f_n - f\|_E d\mu \to 0.$$

b) Die Funktion $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|$ ist eine integrierbare Majorante für $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere ist $\sum_{n=1}^\infty \|f_n(x)\| < \infty$ für μ-fast alle x, und somit ist $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ konvergent in E für μ-fast alle $x \in \Omega$. Der Wertebereich des Grenzwertes ist separabel nach Lemma 3.3. Der Rest folgt mit majorisierter Konvergenz.

c) folgt sofort aus b) mit $f_n := f \cdot \chi_{A_n}$. □

Viele weitere Sätze der skalaren Integrationstheorie übertragen sich mit fast identischen Beweisen auf den vektorwertigen Fall, z.B. der Satz von Fubini. Wir gehen hier noch kurz auf die L^p-Räume ein:

3.10 Definition. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathscr{L}^p(\mu, E)$ definiert als Menge aller stark messbaren Funktionen $f\colon \Omega \to E$, für welche $\|f\|_{L^p(\mu,E)} < \infty$, wobei

$$\|f\|_{L^p(\mu,E)} := \begin{cases} \Big(\int \|f\|_E^p d\mu\Big)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \inf\big\{c \in [0,\infty] : \|f\|_E \leq c \ \mu\text{-fast überall}\big\}, & p = \infty. \end{cases}$$

3.11 Satz. *a) Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathscr{L}^p(\mu, E)$ ein linearer Vektorraum, und $\|\cdot\|_{L^p(\mu,E)}$ ist eine Seminorm auf $\mathscr{L}^p(\mu, E)$.*

b) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathscr{L}^p(\mu, E)$ vollständig.

Beweis. Dies zeigt man jeweils analog zum skalaren Fall mit den offensichtlichen Modifikationen (in b) wird die Vollständigkeit von E verwendet). □

3.12 Definition. Definiere

$$N := \{f\colon \Omega \to E \,|\, f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei

$$L^p(\mu, E) := \mathscr{L}^p(\mu, E)/N$$

der Quotientenraum. Falls das Maß klar ist, schreiben wir auch $L^p(\Omega, E)$. Wir setzen wieder $L^p(\mu) := L^p(\mu, \mathbb{C})$. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wählen wir (falls nichts anderes vereinbart ist) für μ das Lebesgue-Maß, welches wir mit λ bezeichnen. Wie üblich unterscheiden wir im Folgenden in der Notation nicht zwischen einer Funktion und ihrer Äquivalenzklasse.

3.13 Satz. *Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\mu, E)$ ein Banachraum.*

Beweis. Die Vollständigkeit folgt nach Satz 3.11, die Definitheit der Norm folgt aus der Konstruktion als Quotientenraum (ebenso wie im skalaren Fall). □

Wir betrachten nun vektorwertige reguläre Distributionen. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, und $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wie im skalaren Fall definieren wir $L^1_{\text{loc}}(\Omega, E)$ als die Menge aller (Äquivalenzklassen von) Funktionen $f\colon \Omega \to E$, für welche $f\chi_K \in L^1(\Omega, E)$ für alle $K \subset\subset \Omega$ gilt.

3.14 Definition. Die zu $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, E)$ gehörige reguläre Distribution $[f]$ ist definiert durch
$$[f](\varphi) := \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$
Eine Distribution $u \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$ heißt eine reguläre Distribution, falls ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, E)$ existiert mit $u = [f]$.

Es gilt folgender Satz (siehe Anhang):

3.15 Satz. *Die Abbildung $L^1_{\text{loc}}(\Omega, E) \to \mathscr{D}'(\Omega, E)$, $f \mapsto [f]$ ist wohldefiniert, linear und injektiv.*

4. Die Fourier-Transformation

Worum geht's? Die Fourier-Transformation beschreibt mathematisch die Zerlegung einer Funktion oder eines akustischen oder elektromagnetischen Signals in Grundschwingungen. Innerhalb der Mathematik tritt die Fourier-Transformation insbesondere im Rahmen der partiellen Differentialgleichungen auf. Dies liegt daran, dass die Ableitung in der Fourier-Transformierten zur Multiplikation mit der Koordinatenfunktion wird. Die Fourier-Transformierte wird zunächst für L^2-Funktionen und dann für temperierte Distributionen betrachtet.

Im Folgenden sei $(E, \|\cdot\|_E) = (E, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum. Wir definieren

$$C_0(\mathbb{R}^n, E) := \{f \colon \mathbb{R}^n \to E \,|\, f \text{ stetig }, \; f(x) \to 0 \; (|x| \to \infty)\}.$$

Wie im skalaren Fall sieht man, dass $C_0(\mathbb{R}^n, E)$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E$ ein Banachraum ist.

4.1 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ heißt

$$(\mathscr{F} f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

die Fourier-Transformierte von f.

4.2 Satz. *Es gilt $\mathscr{F} \in L(L^1(\mathbb{R}^n, E), C_0(\mathbb{R}^n, E))$.*

Beweis. (i) Offensichtlich existiert für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Integral, und es gilt $\|\mathscr{F} f(\xi)\|_E \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,E)}$.

Wir zeigen, dass $\mathscr{F} f$ stetig ist. Sei dazu $(\xi^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi^{(k)} \to \xi$. Dann gilt $e^{-ix\xi^{(k)}} \to e^{-ix\xi} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ und

$$\|\mathscr{F} f(\xi^{(k)}) - \mathscr{F} f(\xi)\|_E \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E \cdot \underbrace{|e^{-ix\xi^{(k)}} - e^{-ix\xi}|}_{\leq 2} dx \to 0$$

mit majorisierter Konvergenz.

Als stetige Funktion besitzt $\mathscr{F} f$ separablen Wertebereich (Übung) und ist messbar. Damit folgt $\mathscr{F} \in L(L^1(\mathbb{R}^n, E), L^\infty(\mathbb{R}^n, E))$ mit Norm nicht größer als $(2\pi)^{-n/2}$.

(ii) Wir zeigen $\mathscr{F} f(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. Sei zunächst $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$, $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \geq R$. Wähle j mit $|\xi_j| \geq \frac{R}{\sqrt{n}}$. Dann gilt

$$\|\mathscr{F} f(\xi)\|_E = (2\pi)^{-n/2} \Big\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \Big\|_E$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n/2} \Big\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{-i\xi_j} \, e^{-ix\xi} \partial_{x_j} f(x) \, dx \Big\|_E \\
&\le (2\pi)^{-n/2} \|\partial_{x_j} f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{R} \to 0 \quad (R \to \infty).
\end{aligned}
$$

Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$ dicht ist in $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ (Satz B.3 im Anhang), existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\varphi_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n, E)$. Mit $\mathscr{F} \in L(L^1(\mathbb{R}^n, E), L^\infty(\mathbb{R}^n, E))$ erhalten wir $\|\mathscr{F}\varphi_n - \mathscr{F} f\|_\infty \to 0$ und damit $\mathscr{F} f \in C_0(\mathbb{R}^n, E)$. □

4.3 Bemerkung. Die Aussage $(\mathscr{F} f)(\xi) \to 0$ ($|\xi| \to \infty$) für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist bekannt unter dem Namen Riemann-Lebesgue-Lemma.

Die folgenden Bezeichnungen sind im Rahmen der Fouriertransformation nützlich und üblich.

4.4 Definition. a) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definiert man $D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, d.h.

$$
D^\alpha u := (-i)^{|\alpha|} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}.
$$

b) Man setzt $đx := (2\pi)^{-n/2} dx$, d.h.

$$
\int_{\mathbb{R}^n} f(x) đx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.
$$

Im Folgenden verwenden wir auch die (nicht ganz korrekte) Kurzbezeichnung $x^\alpha f$ für die Funktion $x \mapsto x^\alpha f(x)$, analog $\xi^\alpha \mathscr{F} f$.

4.5 Satz. *a) Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:*

(i) $\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ und $D^\alpha(\mathscr{F} f) = (-1)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f)$.

(ii) $\mathscr{F}(D^\alpha f) = \xi^\alpha \mathscr{F} f$.

b) Es gilt $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E))$.

Beweis. a) (i) Unter Verwendung von $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ und der majorisierten Konvergenz folgt

$$
\begin{aligned}
D^\alpha(\mathscr{F} f)(\xi) &= (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} e^{-ix\xi} đ\xi \\
&= (-i)^{2|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\alpha e^{-ix\xi} đ\xi = (-1)^{|\alpha|} \big(\mathscr{F}(x^\alpha f)\big)(\xi).
\end{aligned}
$$

(ii) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x) e^{-ix\xi} đx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D_x^\alpha e^{-ix\xi} đx = \xi^\alpha \mathscr{F} f(\xi).\end{aligned}$$

b) Nach (i) gilt $\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$. Wir betrachten das System von Halbnormen $p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)\|\partial^\alpha f(x)\|_E$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$. Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ gilt

$$\|(\mathscr{F} f)(\xi)\|_E \le p_{0,n+1}(f) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^{n+1})^{-1} đx}_{=:C_n<\infty} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Für gerades m ist $Q(\xi) := (1 + |\xi|^m)$ ein Polynom in x vom Grad m, und mit a) folgt

$$\begin{aligned}p_{\alpha,m}(\mathscr{F} f) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \big\|Q(\xi) D^\alpha (\mathscr{F} f)(\xi)\big\|_E = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \big\|[\mathscr{F}(Q(D)x^\alpha f)](\xi)\big\|_E \\ &\le C_n\, p_{0,n+1}(Q(D)x^\alpha f) \le C_n C_{\alpha,m} \sum_{|\beta|\le m} p_{\beta,|\alpha|+n+1}(f).\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathscr{F} f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$, und nach Satz 1.11 ist $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E))$. □

4.6 Definition und Satz. *Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ definiere $\mathscr{F} u(\varphi) := u(\mathscr{F}\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. Dann ist $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E))$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ gilt $\mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F} u$ als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$.*

Beweis. Das folgt unter Verwendung des adjungierten Operators (Lemma 2.21) sofort aus Satz 4.5. Die letzte Gleichheit folgt aus Satz 4.5 und den entsprechenden Definitionen für Distributionen. □

4.7 Lemma. *Für $\gamma(x) := \exp(-\frac{|x|^2}{2})$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ gilt $\gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{F}\gamma = \gamma$.*

Beweis. (i) Sei $n = 1$. Die Funktion γ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1. \tag{4-1}$$

Damit gilt

$$0 = \mathscr{F}(\gamma' + x\gamma) = i\xi(\mathscr{F}\gamma) + i(\mathscr{F}\gamma)'.$$

Wegen

$$(\mathscr{F}\gamma)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

löst $\mathscr{F}\gamma$ ebenfalls das Anfangswertproblem (4-1). Also gilt $\gamma = \mathscr{F}\gamma$.

(ii) Für $n > 1$ schreiben wir

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\gamma)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \cdot \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j}\Big) đx \\ &= \prod_{j=1}^n \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j\xi_j} dx_j\Big) = \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/2} = \gamma(\xi).\end{aligned}$$

□

4.8 Lemma. *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathscr{F}^2 f(x) = \check{f}(x) := f(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Sei $\gamma_a(x) := \gamma(ax)$ für $a > 0$ und γ wie in Lemma 4.7. Dann gilt

$$(\mathscr{F}\gamma_a)(\xi) = a^{-n}(\mathscr{F}\gamma)\Big(\frac{\xi}{a}\Big),$$

wie man durch Substitution im Integral sieht. Sei $g(x) := e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)$ für $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und $a > 0$ fest. Dann ist $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, und mit Lemma 4.7 folgt

$$(\mathscr{F}g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)e^{-ix\xi} đx = (\mathscr{F}\gamma_a)(\xi + \xi_0) = a^{-n}\gamma\Big(\frac{\xi + \xi_0}{a}\Big).$$

Die Funktion $(x, \xi) \to f(\xi)g(x)e^{-ix\xi}$ ist in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$, also können wir den Satz von Fubini anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(x)g(x) đx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathscr{F}g)(x) đx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)a^{-n}\gamma\Big(\frac{x + \xi_0}{a}\Big) đx = \int_{\mathbb{R}^n} f(au - \xi_0)\gamma(u) đu. \qquad (4\text{-}2)\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir die Substitution $u = \frac{x+\xi_0}{a}$ verwendet.

Wir nehmen den Grenzwert $a \to 0$. Es gilt dann $\gamma(au) \to 1$ punktweise und $g(x) \to e^{-ix\xi_0}$ punktweise. Wegen $\mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ können wir majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(x)g(x) đx \to (\mathscr{F}^2 f)(\xi_0).$$

Um den Grenzwert für die rechte Seite von (4-2) zu berechnen, verwenden wir $f(au - \xi_0) \to f(-\xi_0)$ punktweise. Da $\|f\|_\infty \cdot \gamma$ eine integrierbare Majorante ist, erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(au - \xi_0)\gamma(u) đu \to f(-\xi_0).$$

Also gilt $(\mathscr{F}^2 f)(\xi_0) = f(-\xi_0)$. □

4.9 Definition und Satz. *a) Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume (d.h. linear, stetig und bijektiv mit stetiger Inverser). Es gilt*

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}đ\xi.$$

b) (Satz von Plancherel.) Es gilt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit ist $\mathscr{F}|_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie bzgl. $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathscr{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird und unitär ist.

Beweis. a) Nach Lemma 4.8 gilt $\mathscr{F}^2 f = \check{f}$, d.h. $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$. Damit gilt

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = (\mathscr{F}^3 g)(x) = (\mathscr{F}g)(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}đ\xi.$$

b) Im Beweis von Lemma 4.8 sahen wir

$$\langle \mathscr{F}f, \overline{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \overline{\mathscr{F}g}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Setze nun $h := \overline{\mathscr{F}g}$, d.h.

$$\overline{g} = \overline{\mathscr{F}^{-1}\overline{h}} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \overline{h(x)}e^{ix\xi}đx} = \mathscr{F}h.$$

Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, ist $\mathscr{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, isometrisch. Damit ist der Wertebereich $R(\mathscr{F}_2)$ abgeschlossen. Wegen $R(\mathscr{F}_2) \supset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F}_2$ surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus und damit unitär. □

4.10 Korollar. *a) Die Fouriertransformation $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E))$ ist ein Isomorphismus, und es gilt $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)}$.*

b) Die Fouriertransformation $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E))$ ist ein Isomorphismus mit $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,E)}$. Für $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ gilt $\mathscr{F}[g] = [\mathscr{F}g]$ und

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}g(\xi)đ\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)).$$

Beweis. a) Nach Definition von $\mathscr{F}$ auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und nach Satz 4.9 a) gilt $(\mathscr{F}^4 u)(\varphi) = u(\mathscr{F}^4\varphi) = u(\varphi)$, d.h. $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)}$. Insbesondere ist $\mathscr{F}$ auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ bijektiv und die Inverse $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^3$ ist wieder stetig.

b) Sei $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$. Für die zugehörige reguläre Distribution $[g]$ gilt unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
[\mathscr{F}g](\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(\mathscr{F}g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(\xi) đ\xi\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(x) đx\Big) g(\xi)d\xi \\
&= [g](\mathscr{F}\varphi) = \mathscr{F}[g](\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).
\end{aligned}$$

Aus a) folgt nun $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,E)}$, und für die Inverse gilt

$$\begin{aligned}
[\mathscr{F}^{-1}g](\varphi) &= [\mathscr{F}^3 g](\varphi) = \mathscr{F}^2[\mathscr{F}g](\varphi) = [\mathscr{F}g](\check{\varphi}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}g)(x)\varphi(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}g)(-x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).
\end{aligned}$$

Aus der Injektivität der Abbildung $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, E) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ erhalten wir $(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = (\mathscr{F}g)(-x)$. □

4.11 Beispiele. a) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die Dirac-Distribution $\delta_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$(\mathscr{F}\delta_a)(\varphi) = \delta_a(\mathscr{F}\varphi) = (\mathscr{F}\varphi)(a) = \int e^{-iax}\varphi(x) đx = (2\pi)^{-n/2}[e_a](\varphi)$$

mit $e_a := e^{-ia\cdot}$. Damit gilt in etwas laxer Schreibweise

$$\mathscr{F}\delta_a = (2\pi)^{-n/2}e^{-ia\cdot}.$$

Insbesondere gilt $\mathscr{F}\delta_0 = (2\pi)^{-n/2}\mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 bezeichne. Damit folgt auch (wende $\mathscr{F}^3$ an)

$$\mathscr{F}\mathbf{1} = (2\pi)^{n/2}\delta_0.$$

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. P ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit $P(\Omega) = 1$. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Funktion. Der Erwartungswert von X ist definiert als

$$\mathrm{E}X := \int_\Omega X dP = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, dP \circ X^{-1}$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P \circ X^{-1} =: \nu$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Für die zugehörige Distribution

$$u_\nu(\varphi) := \int \varphi d\nu \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$$

gilt $u_\nu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ und (unter Verwendung des Satzes von Fubini)

$$\begin{aligned}\mathscr{F} u_\nu(\varphi) = u_\nu(\mathscr{F}\varphi) &= \int (\mathscr{F}\varphi)(x)d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-ixt}dtd\nu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}d\nu(x)}_{=:\psi_X(t)} \varphi(t)dt = [\psi_X](\varphi)\end{aligned}$$

mit der *charakteristischen Funktion* von X

$$\psi_X(t) := (2\pi)^{-1/2}E(e^{-itX}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die folgenden elementaren Eigenschaften der Fouriertransformation können leicht unter Verwendung des Transformationssatzes für das Lebesgue-Integral bewiesen werden.

4.12 Lemma (Eigenschaften der Fouriertransformation)**.** *Seien $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$, $s > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

(i) Für $g(x) := e^{iax}f(x)$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = (\mathscr{F}f)(\xi - a)$.

(ii) Für $g(x) := f(x - a)$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = (\mathscr{F}f)(\xi)e^{-ia\xi}$.

(iii) Für $g(x) := f(\frac{x}{s})$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = s^n(\mathscr{F}f)(s\xi)$.

(iv) Sei $E = \mathbb{C}$. Für $g(x) := \overline{f(-x)}$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = \overline{(\mathscr{F}f)(\xi)}$.

Die Fouriertransformierte verwandelt Faltung in punktweise Multiplikation, was für viele Anwendungen von Bedeutung ist. Genauer gilt folgende Aussage (zur Faltung vergleiche auch Anhang B).

4.13 Lemma (Faltung und Fouriertransformation, Teil 1)**.** *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ ist die Faltung $f * g$ definiert durch*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dann gilt $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ und

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f * g) &= (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}f \cdot \mathscr{F}g, \\ \mathscr{F}(fg) &= (2\pi)^{-n/2}\mathscr{F}f * \mathscr{F}g.\end{aligned}$$

Die Abbildung $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$, $(f, g) \mapsto f * g$, ist stetig in jeder Variablen.

Beweis. Übung. □

Der folgende Satz ist nicht ganz so leicht zu beweisen, der Beweis wird hier aus Zeitgründen weggelassen (Teile (i) und (ii) in der Übung).

4.14 Lemma (Faltung und Fouriertransformation, Teil 2). *Seien $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Definiere $\tau_x\varphi := \varphi(x - \cdot)$ und $(u * \varphi)(x) := u(\tau_x\varphi)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.*

(i) Es gilt $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ und $\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha\varphi)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(ii) Es gilt $u * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, und die Abbildung

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E),\ (f, \varphi) \mapsto f * \varphi$$

ist stetig in jeder Variablen.

(iii) Es gilt $\mathscr{F}(u * \varphi) = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}\varphi \cdot \mathscr{F}u$ und $\mathscr{F}(\varphi \cdot u) = (2\pi)^{-n/2}(\mathscr{F}u) * (\mathscr{F}\varphi)$. (Man beachte hier, dass $\mathscr{F}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt.)

4.15 Bemerkung. Nach dem Satz von Plancherel ist $\mathscr{F} \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$ ein isometrischer Isomorphismus. Dies gilt nicht mehr im vektorwertigen Fall, d.h. im Allgemeinen ist $\mathscr{F}$ keine Isometrie in $L^2(\mathbb{R}^n, E)$. Tatsächlich kann man zeigen, dass der Satz von Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n, E)$ genau dann gilt, wenn E isometrisch isomorph zu einem Hilbertraum ist.

5. Sobolevräume: Definition und erste Eigenschaften

Worum geht's? Nach den Vorbereitungen können jetzt die (vektorwertigen) Sobolevräume definiert werden. Dabei gibt es zwei grundlegende Zugänge: Zum einen über die Fouriertransformation, zum anderen über den Ableitungsbegriff und reguläre Distributionen. Der erste Zugang führt auf Bessel-Potentialräume, welche ohne Schwierigkeiten für jede reelle Differenzierbarkeitsordnung definiert werden können (aber zunächst nur im Ganzraum erklärt sind), der zweite Zugang führt auf Sobolevräume mit natürlicher Differenzierbarkeitsordnung (in beliebigen Gebieten). Zumindest im skalaren Fall führen diese beiden Zugänge im ganzzahligen Fall auf denselben Raum.

a) Bessel-Potentialräume

Im Folgenden sei wieder $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wir definieren $\langle\xi\rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$) und $\Lambda^s := \langle D\rangle^s := \mathscr{F}^{-1}\langle\cdot\rangle^s\mathscr{F}$ für $s \in \mathbb{R}$. Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ definieren wir $(\Lambda^s u)(\varphi) := u(\Lambda^s\varphi)$ ($\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$).

5.1 Satz. *Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist $\Lambda^s \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E))$ ein Isomorphismus und $\Lambda^s \in L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E))$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Für alle $j = 1, \dots, n$ gilt $\frac{\partial}{\partial\xi_j}\langle\xi\rangle^s = \frac{s}{2}\langle\xi\rangle^{s-2}2\xi_j$, und induktiv zeigt man, dass $\partial^\alpha\langle\xi\rangle^s$ eine Summe von Ausdrücken der Form $P_k(\xi)\langle\xi\rangle^{s-k-|\alpha|}$ mit $k \le |\alpha|$ ist, wobei P_k ein Polynom von Grad $\le k$ ist. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|\partial^\alpha\langle\xi\rangle^s| \le c_\alpha\langle\xi\rangle^{s-|\alpha|} \le c'_\alpha(1+|\xi|^{s-|\alpha|}) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n)$$

mit Konstanten $c_\alpha, c'_\alpha > 0$.

Unter Verwendung der Leibniz-Regel sieht man, dass die Abbildung

$$m_s \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E),\ \varphi \mapsto \langle\cdot\rangle^s\varphi,$$

wohldefiniert und stetig ist. Damit ist auch $\Lambda^s = \mathscr{F}^{-1}m_s\mathscr{F}$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. Offensichtlich gilt $\Lambda^s\Lambda^{-s} = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$, damit ist ist $T_s := \Lambda^s \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E))$ ein Isomorphismus.

Es gilt $\Lambda^s = T'_s \in L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E))$ mit Lemma 2.21, und offensichtlich ist Λ^s wieder ein Isomorphismus (mit Inversem Λ^{-s}). □

5.2 Definition (Bessel-Potentialräume)**.** Seien $s \in \mathbb{R}$ und $1 \le p \le \infty$. Dann wird der L^p-Bessel-Potentialraum der Ordnung s definiert durch $H_p^s(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^s u \in L^p(\mathbb{R}^n, E)\}$, versehen mit der Norm $\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} := \|\Lambda^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n,E)}$.

In dieser Definition ist die Bedingung $\Lambda^s u \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ im Sinne regulärer Distributionen zu verstehen: Es existiert ein $v \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\Lambda^s u = [v]$. Aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung (Anhang B) ist in diesem Fall die Funktion v eindeutig.

5.3 Satz. *a) Es gilt $H_p^s(\mathbb{R}^n, E) = \Lambda^{-s} L^p(\mathbb{R}^n, E)$, und die Abbildung $\Lambda^{-s}\colon L^p(\mathbb{R}^n, E) \to H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ ist ein isometrischer Isomorphismus.*

b) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\Lambda^s\colon H_p^t(\mathbb{R}^n, E) \to H_p^{t-s}(\mathbb{R}^n, E)$ ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. a) Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n, E) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ und $v := \Lambda^{-s} u$. Dann gilt $\Lambda^s v = \Lambda^s \Lambda^{-s} u = u \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ und damit $v \in H_s^p(\mathbb{R}^n, E)$. Andererseits sei $v \in H_s^p(\mathbb{R}^n, E)$. Für $u := \Lambda^s v$ folgt dann $u \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ und $\Lambda^{-s} u = v$. Damit ist die Abbildung $\Lambda^{-s} \in L(L^p(\mathbb{R}^n, E), H_p^s(\mathbb{R}^n, E))$ ein Isomorphismus. Nach Definition der Norm gilt $\|v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n, E)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n, E)}$, d.h. Λ^{-s} ist eine Isometrie.

b) Es gilt $\Lambda^s = \Lambda^{s-t} \Lambda^t$, und die beiden Abbildungen $\Lambda^t \in L(H_p^t(\mathbb{R}^n, E), L^p(\mathbb{R}^n, E))$ und $\Lambda^{s-t} \in L(L^p(\mathbb{R}^n, E), H_p^{t-s}(\mathbb{R}^n, E))$ sind nach Teil a) jeweils isometrische Isomorphismen. □

5.4 Korollar. *a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $1 \le p \le \infty$ ist $H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ vollständig.*

b) Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $1 \le p < \infty$ gelten die stetigen und dichten Einbettungen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$.

Beweis. a) Die Vollständigkeit von $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ bleibt bei isometrischen Isomorphismen erhalten.

b) Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ liegt, ist auch $\Lambda^{-s}\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E)$ dicht in $H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n, E)}$-Norm. Wegen $\Lambda^{-s}\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E) \subset \Lambda^{-s}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E)$ ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \subset H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ dicht. Die Einbettung $\mathrm{id}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \to H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ ist stetig als Komposition der stetigen Abbildungen

$$\mathrm{id}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{\Lambda^s} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, E) \xrightarrow{\Lambda^{-s}} H_p^s(\mathbb{R}^n, E).$$

Wir erhalten mit Satz 2.19

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$$

und damit auch $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$.

□

5.5 Beispiel. Für die Dirac-Distributdion $\delta_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\delta_0 = (2\pi)^{-n/2}\mathbf{1}$ und damit gilt $\langle\cdot\rangle^s \mathscr{F}\delta_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ falls $sp < -n$. Im Falle $p = 2$ kann man den Satz von Plancherel anwenden, und es folgt $\delta_0 \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ falls $s < -\frac{n}{2}$.

5.6 Bemerkung. a) Die Elemente von $H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ sind im Allgemeinen keine regulären Distributionen. Für $s = 0$ gilt nach Definition $H_p^0(\mathbb{R}^n, E) = L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

b) In den Fällen $p = 2$ und $p = 1$ ist die Fourier-Transformierte von $f \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ wieder eine reguläre Distribution, und somit ist auch die Fouriertransformierte jeder Funktion $f \in H_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $p \in \{1, 2\}$ wieder eine Funktion. Tatsächlich gilt dies für alle $p \in [1, 2]$, wie man mit Hilfe der Interpolationstheorie zeigen kann.

c) Falls $p = 2$ und falls E ein Hilbertraum ist, so ist auch $H_2^s(\mathbb{R}^n, E)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \langle (\mathscr{F}u)(\xi), (\mathscr{F}v)(\xi)\rangle_E d\xi \quad (u, v \in H_2^s(\mathbb{R}^n))$$

ein Hilbertraum. Denn die rechte Seite ist gerade $\langle \Lambda^s u, \Lambda^s v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n,E)}$, wobei der Satz von Plancherel verwendet wurde. Häufig schreibt man auch $H^s(\mathbb{R}^n, E) := H_2^s(\mathbb{R}^n, E)$.

b) Ganzzahlige Sobolevräume und der Satz von Mikhlin

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

5.7 Definition (Sobolevräume)**.** Seien $1 \le p \le \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann wird der L^p-Sobolevraum der Ordnung k definiert als

$$W_p^k(\Omega, E) := \{u \in L^p(\Omega, E) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega, E)\ (|\alpha| \le k)\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega,E)} := \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega,E)}\Big)^{1/p} \quad (u \in W_p^k(\mathbb{R}^n, E))$$

für $1 \le p < \infty$ bzw.

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega,E)} := \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega,E)}$$

für $p = \infty$.

Wiederum ist in dieser Definition die Ableitung im Distributionssinn zu verstehen. Gefordert ist also insbesondere, dass die distributionellen Ableitungen (in $\mathscr{D}'(\Omega, E)$) reguläre Distributionen sind.

5.8 Satz. *Für alle $1 \le p \le \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $W_p^k(\Omega, E)$ ein Banachraum.*

Beweis. Das zeigt man wörtlich wie im skalaren Fall. □

Für einen Vergleich der Räume $W_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ und $H_p^k(\mathbb{R}^n, E)$ verwenden wir den Satz von Mikhlin. Dieser (und damit die folgenden Aussagen) werden nur skalarwertig formuliert. Man beachte, dass hier $1 < p < \infty$ gefordert wird. In folgender Definition ist $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$.

5.9 Satz (Satz von Mikhlin). *Sei $1 < p < \infty$. Sei $m \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit*

$$C_m := \max_{|\alpha| \le [\frac{n}{2}]+1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{|\alpha|} |\partial^\alpha m(\xi)| < \infty.$$

Sei $T_m := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\|T_m \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c_p C_m \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \; (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

mit einer nur von p abhängigen Konstante c_p. Insbesondere lässt sich T_m eindeutig zu einem Operator $T_m \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ fortsetzen mit $\|T_m\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le c_p C_m$.

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen, der Beweis ist relativ aufwändig.

5.10 Definition. In obiger Situation heißt m das Symbol des Operators T_m. Eine $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktion m heißt Fourier-Multiplikator, falls $T_m := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F}$ sich zu einem stetigen Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lässt. In diesem Fall schreibt man $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$.

5.11 Lemma. *a) Seien $1 < p < \infty$ und $s \in (0, \infty)$ und $m(\xi) := P(\xi)\langle\xi\rangle^{-s}$ mit einem Polynom P vom Grad nicht größer als $[s]$. Dann erfüllt m die Mikhlin-Bedingung und ist damit ein Fourier-Multiplikator.*

b) Sei $1 < p < \infty$. Sei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi(t) = 0$ ($|t| \le \frac{1}{2}$), $\chi(t) = 1$ ($t \ge 1$), $\chi(t) \ge 0$ ($t > 0$) und $\chi(-t) = -\chi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$). Dann gilt $\chi \in M_p(\mathbb{R})$ sowie $\xi \mapsto \chi(\xi_j) \in M_p(\mathbb{R}^n)$ für alle $j = 1, \dots, n$.

c) Seien $1 < p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$. Mit χ aus Teil b) definiere

$$m(\xi) := \frac{\langle\xi\rangle^k}{1 + \sum_{j=1}^n [\chi(\xi_j)\xi_j]^k}.$$

Dann gilt $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Im Beweis von Satz 5.1 wurde die Abschätzung $|\partial^\alpha \langle\xi\rangle^{-s}| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{-s-|\alpha|}$ gezeigt. Für ein Polynom Q vom Grad nicht größer als $[s] + |\alpha|$ folgt damit

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |Q(\xi)\partial^\alpha \langle\xi\rangle^{-s}| < \infty.$$

Unter Verwendung der Leibniz-Regel sieht man, dass m die Mikhlin-Bedingung erfüllt.

b) Die Funktion χ erfüllt die eindimensionale Mikhlin-Bedingung, da $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ beschränkt ist und alle Ableitungen von χ kompakten Träger haben. Sei nun $\chi_1(\xi) := \chi(\xi_1)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$. Für eine Funktion $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichne $\mathscr{F}_1 u$ die Fouriertransformierte $x_1 \rightsquigarrow \xi_1$ von $u(\cdot, x')$, wobei $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Analog sei $\mathscr{F}'$ die Fouriertransformierte $x' \rightsquigarrow \xi'$ in $n-1$ Variablen. Dann gilt $\mathscr{F}u = \mathscr{F}'\mathscr{F}_1 u$ und damit

$$\mathscr{F}\mathscr{F}_1^{-1}\chi(\xi_1)\mathscr{F}_1 u = \mathscr{F}'\chi(\xi_1)\mathscr{F}_1 u = \chi(\xi_1)\mathscr{F}'\mathscr{F}_1 u = \chi(\xi_1)\mathscr{F}u \quad (u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

d.h. $\mathscr{F}^{-1}\chi(\xi_1)\mathscr{F}u = \mathscr{F}_1^{-1}\chi(\xi_1)\mathscr{F}_1 u$ für $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Somit ist (mit etwas unkorrekter Schreibweise)

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}\chi(\xi_1)\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \Big\| \|[\mathscr{F}_1^{-1}\chi(\xi_1)\mathscr{F}_1 u](x_1, x')\|_{L^p(\mathbb{R}_{x_1})} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})} \\ &\le c_\chi \Big\| \|u(x_1, x')\|_{L^p(\mathbb{R}_{x_1})} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})} = c_\chi \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Also ist $\xi \mapsto \chi(\xi_1) \in M_p(\mathbb{R}^n)$, analog gilt dies für alle ξ_j.

c) Offensichtlich ist $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir verwenden $\chi(\xi_j)\xi_j = |\xi_j|$ für $|\xi_j| \ge 1$ sowie $\chi(\xi_j)\xi_j \ge 0$ für $|\xi_j| \le 1$ und erhalten in beiden Fällen $1 + [\chi(\xi_j)\xi_j]^k \ge \frac{1}{2}(1 + |\xi_j|^k)$. Somit gilt

$$1 + \sum_{j=1}^n [\chi(\xi_j)\xi_j]^k \ge C\Big(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^k\Big) \ge C'\langle\xi\rangle^k,$$

wobei für die zweite Ungleichung die Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$ verwendet wurde. Für die Ableitungen von m verwendet man Quotienten- und Produktregel und sieht, dass

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

gilt, wobei die Konstanten c_α von den Ableitungen von φ bis zum Grad $|\alpha|$ abhängen. Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von Mikhlin. □

5.12 Satz. *Für $1 < p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $W_p^k(\mathbb{R}^n) = H_p^k(\mathbb{R}^n)$, und die Normen $\|\cdot\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)}$ und $\|\cdot\|_{H_p^k(\mathbb{R}^n)}$ sind äquivalent.*

Beweis. (i) Sei $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$. Nach Satz 4.6 gilt $D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha\mathscr{F}u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha\langle\xi\rangle^{-k}\mathscr{F}v$ mit $v := \mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle^k\mathscr{F}u$. Nach Definition der Norm in $H_p^k(\mathbb{R}^n)$ ist $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H_p^k(\mathbb{R}^n)}$. Nach Lemma 5.11 a) ist $\xi \mapsto \xi^\alpha\langle\xi\rangle^{-k}$ ein Fourier-Multiplikator, und damit gilt $\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c_\alpha\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Insgesamt erhalten wir die Abschätzung

$$\|u\|^p_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{H_p^k(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

wobei die Konstante C nicht von u abhängt. Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H_p^k(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt die obige Abschätzung für alle $u \in H_p^k(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere folgt $H_p^k(\mathbb{R}^n) \subset W_p^k(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei nun wieder $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Um die $H_p^k(\mathbb{R}^n)$-Norm von u abzuschätzen, schreiben wir

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle^k\mathscr{F}u &= \big(\mathscr{F}^{-1}m(\xi)\mathscr{F}\big)\Big(\mathscr{F}^{-1}\Big[1+\sum_{j=1}^n(\chi(\xi_j)\xi_j)^k\Big]\mathscr{F}\Big)u\\ &= \big(\mathscr{F}^{-1}m(\xi)\mathscr{F}\big)\Big[1+\sum_{j=1}^n(\mathscr{F}^{-1}\chi(\xi_j)\mathscr{F})^k(\mathscr{F}^{-1}\xi_j^k\mathscr{F})\Big]u,\end{aligned}$$

wobei $m(\xi)$ und $\chi(\xi_j)$ wie in Lemma 5.11 definiert seien. Nach Lemma 5.11 b) und c) sind $\xi \mapsto m(\xi)$ sowie $\xi \mapsto \chi(\xi_j)$ Fourier-Multiplikatoren. Damit erhalten wir

$$\|\mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle^k\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\Big[\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|\mathscr{F}^{-1}\xi_j^k\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big] \le C\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Hier wurde $\mathscr{F}^{-1}\xi_j^k\mathscr{F}u = (-i)^k(\frac{\partial}{\partial x_j})^k u$ verwendet. Wie in Teil (i) folgt diese Aussage wegen Dichtheit von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ in $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, und wir erhalten die Mengengleichheit von $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ und $H_p^k(\mathbb{R}^n)$ sowie die Äquivalenz der Normen. $\square$

6. Klassische Sätze der Sobolevraumtheorie

Worum geht's? In diesem Abschnitt werden (im skalarwertigen Fall) einige wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume besprochen. Aus den Einbettungssätzen folgt insbesondere, dass eine Sobolevraumfunktion (nach eventueller Änderung auf einer Nullmenge) sogar stetig bzw. stetig differenzierbar ist. Der Satz von Rellich und Kondrachov beinhaltet die Kompaktheit der entsprechenden Einbettung, welche unter anderem für die Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen wichtig ist.

a) Einbettungssätze

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir schreiben $\|\cdot\|_{m,p} := \|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ für $1 \le p \le \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Der Raum $W_{p,0}^m(\Omega)$ wird definiert als der Abschluss von $\mathscr{D}(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{m,p}$-Norm. Für $m \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir $C_b^m(\Omega)$ für den Banachraum aller stetigen und beschränkten Funktionen auf Ω, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C_b^m(\Omega)} := \max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha u(x)| \quad (u \in C_b^m(\Omega)).$$

Wir setzen $C_b(\Omega) := C_b^0(\Omega)$. Im Folgenden wird ohne Beweis verwendet, dass $C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ dicht in $W_p^m(\Omega)$ liegt.

6.1 Definition. a) Zu $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $\sphericalangle(x,v)$ der Winkel zwischen x und v. Definiere zu $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $r > 0$ und $\kappa > 0$

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ oder } 0 < |x| \le r,\ \sphericalangle(x,v) \le \tfrac{\kappa}{2}\}$$

der Kegel in Richtung v mit Öffnungswinkel κ und Höhe r.

b) Das Gebiet Ω erfüllt die Kegelbedingung, falls ein Kegel K der obigen Form existiert so, dass zu jedem $x \in \Omega$ ein Kegel $K_x \subset \Omega$ mit Spitze bei x existiert, der kongruent zu K ist (d.h. das Bild von K unter einer Translation und Rotation ist).

6.2 Satz. *Sei $1 < p < \infty$ und $mp > n$. Falls Ω die Kegelbedingung erfüllt, so existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \le C\|u\|_{m,p} \quad (u \in C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)).$$

Beweis. Sei K der Kegel aus der Kegelbedingung, r die Höhe von K und $x \in \Omega$ fest. Zu $u \in C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ und $y \in K_x$ definiere $f(t) := u(tx + (1-t)y)$ $(t \in [0,1])$. Dann gilt

$$f'(t) = \sum_{k=1}^n (\partial_k u)\big(tx + (1-t)y\big)(x_k - y_k) = \sum_{|\alpha|=1} (\partial^\alpha u)\big(tx + (1-t)y\big)(x-y)^\alpha,$$

und induktiv zeigt man, dass

$$f^{(j)}(0) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} (\partial^\alpha u)(y)(x-y)^\alpha \quad (j = 0, \dots, m).$$

Die Taylor-Formel mit Lagrange-Restterm liefert

$$\begin{aligned} u(x) = f(1) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha u)(y)(x-y)^\alpha \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (\partial^\alpha u)(tx + (1-t)y)(x-y)^\alpha dt. \end{aligned}$$

Nimmt man den Betrag und integriert bezüglich y über den Kegel K_x, so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda(K_x)|u(x)| \le &\sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{K_x} |\partial^\alpha u(y)|dy \\ &+ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_{K_x} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \big|(\partial^\alpha u)(tx + (1-t)y)\big| \, |x-y|^m dtdy. \end{aligned}$$

Wir verwenden beim letzten Doppelintegral Fubini und substituieren $z = tx + (1-t)y$, d.h. $z - x = (1-t)(x-y)$ und $dz = (1-t)^n dy$. Man beachte, dass der Integrationsbereich für z dann durch $K_{x,(1-t)r} := \{z \in K_x : |z-x| \le (1-t)r\}$ gegeben ist. Wir erhalten für das Doppelintegral

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{K_{x,(1-t)r}} \frac{m}{\alpha!} (1-t)^{-1-n} |z-x|^m |\partial^\alpha u(z)| dz\, dt \\ &\qquad = \frac{m}{\alpha!} \int_{K_x} |z-x|^m |\partial^\alpha u(z)| \int_0^{1-|z-x|/r} (1-t)^{-1-n} dt\, dz, \end{aligned}$$

wobei wieder Fubini verwendet wurde. Beim Integral über t substituiert man $\tau = 1-t$ und erhält

$$\int_0^{1-|z-x|/r} (1-t)^{-1-n} dt = \int_{|z-x|/r}^1 \tau^{-1-n} d\tau = \frac{r^n}{n|z-x|^n} - \frac{1}{n} \le \frac{r^n}{n} |z-x|^{-n}.$$

Eingesetzt erhält man mit einer nicht von u oder x abhängigen Konstante C_1 die Abschätzung

$$|u(x)| \le C_1 \Big(\sum_{|\alpha|\le m-1} \int_{K_x} |\partial^\alpha u(y)|dy + \sum_{|\alpha|=m} \int_{K_x} |\partial^\alpha u(y)| \, |x-y|^{m-n} dy \Big).$$

Die Integrale auf der rechten Seite werden mit der Hölderschen Ungleichung abgeschätzt. Für $|\alpha| \le m-1$ erhalten wir

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^1(K_x)} \le \|\chi_{K_x}\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = (\lambda(K_x))^{1/p'} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $|\alpha| = m$ verwenden wir

$$\| \, |x-\cdot|^{m-n} \partial^\alpha u\|_{L^1(K_x)} \le \| \, |x-\cdot|^{m-n} \, \|_{L^{p'}(K_x)} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Wegen $(m-n)p' = (m-n)\frac{p}{p-1} > -n$ für $mp > n$ ist $\| \, |x-\cdot| \, \|_{L^{p'}(K_x)} < \infty$ (und unabhängig von x). Insgesamt erhalten wir $|u(x)| \le C\|u\|_{m,p}$ mit einer von u unabhängigen Konstante $C > 0$. □

6.3 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Seien $1 < p < \infty$, $mp > n$, $j \in \mathbb{N}_0$. Falls Ω die Kegelbedingung erfüllt, so gilt*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega).$$

Genauer gilt: Jede Äquivalenzklasse in $W_p^{m+j}(\Omega)$ besitzt einen Repräsentanten in $C_b^j(\Omega)$, und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{C_b^j(\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^{m+j}(\Omega)} \quad (u \in W_p^{m+j}(\Omega)).$$

Beweis. (i) Sei $j = 0$. Zu $u \in W_p^m(\Omega)$ existiert eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $W_p^k(\Omega)$. Insbesondere ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{m,p}$. Nach Satz 6.2 gilt

$$\sup_{x\in\Omega} |u_k(x) - u_\ell(x)| \le C\|u_k - u_\ell\|_{m,p} \quad (k, \ell \in \mathbb{N}).$$

Damit ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $C_b(\Omega)$, und es existiert ein $v \in C_b(\Omega)$ mit $\|u_k - v\|_\infty \to 0$ $(k \to \infty)$.

Da $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$, existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $u_{k_j} \to u$ $(j \to \infty)$ punktweise fast überall. Wegen $u_k \to v$ punktweise folgt $u = v$ fast überall, d.h. es gibt einen stetigen Repräsentanten der zu u gehörigen Äquivalenzklasse. Die Abschätzung $\|v\|_\infty \le C\|u\|_{m,p}$ folgt aus der gleichen Abschätzung für u_k, siehe Satz 6.2.

(ii) Für $j > 0$ betrachte $\partial^\alpha u \in W_p^m(\Omega)$ für $|\alpha| \le j$. Nach (i) gilt $\partial^\alpha u \in C_b(\Omega)$, d.h. $u \in C_b^j(\Omega)$, und

$$\|u\|_{C_b^j(\Omega)} = \max_{|\alpha|\le j} \|\partial^\alpha u\|_\infty \le C \max_{|\alpha|\le j} \|\partial^\alpha u\|_{m,p} \le C\|u\|_{m+j,p}.$$

□

6.4 Satz (Einbettungssatz für $W^m_{p,0}(\Omega)$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $1 < p < \infty$, $j \in \mathbb{N}_0$ und $mp > n$. Dann gilt $W^{m+j}_{p,0}(\Omega) \hookrightarrow C^j_b(\Omega)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 6.3 reicht es, die Abschätzung

$$\|u\|_\infty \le C\|u\|_{m,p} \quad (u \in \mathscr{D}(\Omega))$$

zu zeigen. Für $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ sei $E_0 u$ die triviale Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $E_0u(x) := u(x)$ $(x \in \Omega)$ und $E_0u(x) := 0$ $(x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dann gilt $E_0 u \in W^m_p(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathbb{R}^n$ die Kegelbedingung erfüllt, folgt mit Satz 6.3

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |E_0u(x)| \le C\|E_0u\|_{W^m_p(\mathbb{R}^n)} = C\|u\|_{W^m_p(\Omega)}.$$

□

6.5 Korollar. *Falls Ω die Kegelbedingung erfüllt und $1 < p < \infty$ ist, so gilt*

$$W^\infty_p(\Omega) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} W^m_p(\Omega) \subset C^\infty_b(\Omega).$$

Beweis. Das folgt direkt aus Satz 6.3. □

Satz 6.3 ist nur ein Beispiel eines Einbettungssatzes. Im folgenden Satz werden einige weitere Einbettungen zusammengefasst. Dabei bezeichnet $BUC^j(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}_0$ die Menge aller $u \in C^j(\Omega)$, für welche alle Ableitungen der Ordnung $\le j$ beschränkt und gleichmäßig stetig sind, und $C^{j,\lambda}(\Omega)$ ist die Menge aller $u \in BUC^j(\Omega)$, für welche alle Ableitungen der Ordnung $\le j$ zusätzlich hölderstetig mit Exponent $\lambda \in (0,1)$ sind. Beide Räume sind Banachräume, wobei die Normen durch

$$\|u\|_{BUC^j(\Omega)} := \max_{0\le|\alpha|\le j} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha u(x)|,$$
$$\|u\|_{C^{j,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_{BUC^j(\Omega)} + \max_{0\le|\alpha|\le j} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)}{|x-y|^\lambda}$$

definiert sind. Wir setzen noch $C^\lambda(\Omega) := C^{0,\lambda}(\Omega)$.

6.6 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $j \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p < \infty$.*

a) Das Gebiet Ω erfülle die Kegelbedingung.

(i) Für $mp \ge n$ gilt $W^{j+m}_p(\Omega) \hookrightarrow W^j_q(\Omega)$ $(q \in [p,\infty))$.

(ii) Für $mp < n$ gilt $W^{j+m}_p(\Omega) \hookrightarrow W^j_q(\Omega)$ $(q \in [p, \frac{np}{n-mp}])$.

b) Das Gebiet Ω erfülle die starke lokale Lipschitz-Bedingung (dies gilt z.B. falls Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist). Für $mp > n$ und $\lambda \in (0, m - \frac{n}{p}] \cap (0,1)$ gilt $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\Omega)$.

6.7 Bemerkung. a) Besonders interessant ist der Spezialfall $n = 1$. Hier erhalten wir insbesondere $W_p^1((a,b)) \hookrightarrow BUC((a,b))$ für alle $p > 1$. Ebenfalls wichtig für Anwendungen ist der Fall $p = 2$: Hier erhalten wir z.B. $W_2^m(\Omega) \hookrightarrow BUC(\Omega)$, falls Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist und $m > \frac{n}{2}$.

b) Für $mp > n$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$ folgt nach Satz 6.3 und Satz 5.12 die Einbettung $H_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow BUC(\mathbb{R}^n)$. Tatsächlich gilt dies für alle $m \in \mathbb{R}$ mit $mp > n$.

b) Der Satz von Rellich-Kondrachov

6.8 Definition. Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Dann heißt T kompakt, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir schreiben $K(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : T \text{ kompakt}\}$.

6.9 Bemerkung. Für $T \in K(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$ gilt offensichtlich $ST \in K(X,Z)$. Genauso folgt $ST \in K(X,Z)$ falls $T \in L(X,Y)$ und $S \in K(Y,Z)$. Speziell für $X = Y = Z$ erhält man, dass $K(X,X)$ ein zweiseitiges Ideal in $L(X,X)$ ist.

6.10 Lemma. *Seien $1 \le p_0 < p < p_1 < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

a) Es gilt $L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ und

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|^{\mu}_{L^{p_0}(\Omega)} \|u\|^{\lambda}_{L^{p_1}(\Omega)} \quad (u \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega))$$

mit

$$\lambda := \frac{p_0(p_1 - p)}{p(p_1 - p_0)},\ \mu := 1 - \lambda.$$

b) Seien X ein Banachraum $T \in K(X, L^{p_0}(\Omega)) \cap L(X, L^{p_1}(\Omega))$. Dann gilt $T \in K(X, L^p(\Omega))$.

Beweis. a) Setze $\alpha := p\lambda = \frac{p_0}{p_1 - p_0}(p_1 - p)$ und $\beta := p\mu = p - \alpha = \frac{p_1}{p_1 - p_0}(p - p_0)$. Dann gilt $\alpha + \beta = p$ und

$$\frac{\alpha}{p_0} + \frac{\beta}{p_1} = \frac{p_1 - p}{p_1 - p_0} + \frac{p - p_0}{p_1 - p_0} = 1.$$

Man schreibt $|u|^p = |u|^\alpha |u|^\beta$ und erhält mit der Hölderschen Ungleichung

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \big\||u|^p\big\|_{L^1(\Omega)} = \big\||u|^\alpha |u|^\beta\big\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}&\leq \big\||u|^\alpha\big\|_{L^{p_0/\alpha}(\Omega)}\big\||u|^\beta\big\|_{L^{p_1/\beta}(\Omega)}\\&= \|u\|^\alpha_{L^{p_0}(\Omega)}\|u\|^\beta_{L^{p_1}(\Omega)} = \|u\|^{p\lambda}_{L^{p_0}(\Omega)}\|u\|^{p\mu}_{L^{p_1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Dann besitzt $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung eine in $L^{p_0}(\Omega)$ konvergente Teilfolge, die wieder mit $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet wird. Mit Teil a) folgt

$$\|Tx_n - Tx_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \|Tx_n - Tx_m\|^\mu_{L^{p_0}(\Omega)}\Big(\|T\|_{L(X,L^p(\Omega))}\|x_n - x_m\|_X\Big)^\lambda.$$

Wegen $\|Tx_n - Tx_m\|_{L^{p_0}(\Omega)} \to 0$ für $n, m \to \infty$ und $\|x_n\|_X \leq C$ erhalten wir, dass $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in $L^p(\Omega)$ eine Cauchyfolge und damit konvergent ist. □

Im Folgenden sei E_0u die triviale Fortsetzung einer Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^n$. Der nächste Satz ist eine Art L^1-Analogon des Satzes von Arzelà-Ascoli. Im Beweis wird der Friedrichsche Glättungsoperator $u \mapsto J_\eta u = \varphi_\eta * u$ verwendet, wobei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$, $\varphi(x) = 0$ $(|x| \geq 1)$ und $\varphi_\eta(x) := \eta^{-n}\varphi(\frac{x}{\eta})$. Es gilt $J_\eta u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\|J_\eta u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

6.11 Satz. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ beschränkt. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$ und eine kompakte Menge $K \subset\subset \Omega$ mit*

$$\|(E_0u)(\cdot + h) - (E_0u)(\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon \quad (|h| < \delta,\ u \in \mathcal{F}), \tag{6-1}$$

$$\|u\|_{L^1(\Omega\setminus K)} < \varepsilon \quad (u \in \mathcal{F}). \tag{6-2}$$

Dann besitzt jede Folge aus $\mathcal{F}$ eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Es genügt, den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ zu betrachten, da auch die trivialen Fortsetzungen E_0u die Voraussetzungen (6-1)–(6-2) erfüllen und aus der Konvergenz in $L^1(\mathbb{R}^n)$ die in $L^1(\Omega)$ folgt. Sei also $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Angenommen, es existiert eine Folge in $\mathcal{F}$ ohne konvergente Teilfolge. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ mit $\|u_n - u_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \geq 6\,\varepsilon$ für alle $n \neq m$. Zu diesem ε wählen wir $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus K)} < \varepsilon$ $(u \in \mathcal{F})$.

Für $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}\|J_\eta u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{|y|\leq\eta}\varphi_\eta(y)\big(u(x-y) - u(x)\big)dy\Big|dx\\&\leq \int_{|y|\leq\eta}\varphi_\eta(y)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x-y) - u(x)|dx\,dy\\&\leq \max_{|y|\leq\eta}\|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{|y|\leq\eta}\varphi_\eta(y)dy\end{aligned}$$

$$= \max_{|y|\le\eta} \|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, gilt diese Abschätzung für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen δ wie in der Voraussetzung des Satzes und fixieren $\eta < \delta$. Nach (6-1) gilt die Abschätzung

$$\|J_\eta u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon \quad (u \in \mathcal{F}).$$

Wir zeigen nun, dass die Menge $\mathcal{F}_\eta := \{J_\eta u|_K : u \in \mathcal{F}\} \subset C(K)$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt. Es gilt für alle $x \in K$

$$|J_\eta u(x)| = \Big| \int_{|y|\le\eta} \varphi_\eta(y) u(x-y)dy \Big| \le \|\varphi_\eta\|_\infty \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C < \infty \quad (u \in \mathcal{F}).$$

sowie (durch Ersetzen von u durch $u(\cdot + h) - u(\cdot)$)

$$|J_\eta u(x+h) - J_\eta u(x)| \le \|\varphi_\eta\|_\infty \|u(\cdot + h) - u(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in \mathcal{F}).$$

Also ist $\mathcal{F}_\eta \subset C(K)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt und wegen (6-1) gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\overline{\mathcal{F}_\eta} \subset C(K)$ kompakt. Daher besitzt die offene Überdeckung

$$\overline{\mathcal{F}_\eta} \subset \bigcup_{v \in \mathcal{F}_\eta} B(v, \tfrac{\varepsilon}{\lambda(K)}) \;\text{ mit } B(v, \tfrac{\varepsilon}{\lambda(K)}) := \{w \in \overline{\mathcal{F}_\eta} : \|v - w\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{\lambda(K)}\}$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\overline{\mathcal{F}_\eta} \subset \bigcup_{j=1}^N B(v_j, \tfrac{\varepsilon}{\lambda(K)}), \quad v_1, \dots, v_N \in C(K).$$

Somit existiert zu jedem $u \in \mathcal{F}$ ein $j \in \{1, \dots, N\}$ mit

$$\|J_\eta u - v_j\|_{L^1(K)} \le \lambda(K) \|J_\eta u - v_j\|_\infty < \varepsilon$$

und damit

$$\|u - E_0 v_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n \setminus K)} + \|u - J_\eta u\|_{L^1(K)} + \|J_\eta u - v_j\|_{L^1(K)} < 3\varepsilon.$$

Da die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus paarweise verschiedenen Funktionen besteht, existieren $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ und n, m mit $n \ne m$ und $\|u_n - E_0 v_{j_0}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon$, $\|u_m - E_0 v_{j_0}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\|u_n - u_m\| \ge 6\varepsilon$. □

6.12 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt, und sei $1 \le p < \infty$. Dann ist die Einbettung $W_p^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ kompakt.*

Beweis. Wir definieren $p_1 := \frac{np}{n-p} > p$ und verwenden die Einbettung $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$ aus Satz 6.6, welche für alle $p \in (1,\infty)$ gilt.

Wir zeigen zunächst $\mathrm{id} \in K(W_p^1(\Omega), L^1(\Omega))$. Sei dazu $\mathcal{F} \subset W_p^1(\Omega)$ beschränkt bezüglich der $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm. Zu $j \in \mathbb{N}$ sei $K_j := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{2}{j}\}$. Mit der Hölderschen Ungleichung und der Einbettung $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$ folgt

$$\|u\|_{L^1(\Omega\setminus K_j)} \leq \|u\|_{L^{p_1}(\Omega\setminus K_j)} \lambda(\Omega\setminus K_j)^{1-1/p_1} \leq C\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \lambda(\Omega\setminus K_j)^{1-1/p_1} < \varepsilon \quad (u \in \mathcal{F})$$

falls j hinreichend groß ist. Analog folgt für großes j

$$\|(E_0u)(\cdot + h) - (E_0u)(\cdot)\|_{L^1(\Omega\setminus K_j)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (u \in \mathcal{F}).$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < \frac{1}{j}$ und $x \in \Omega_j$, $t \in [0,1]$ gilt $x + th \in \Omega_{2j}$. Daher erhalten wir für $u \in C^\infty(\Omega)$ mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
\int_{K_j} |u(x+h) - u(x)| dx &\leq \int_{K_j} \int_0^1 \Big|\frac{d}{dt} u(x+th)\Big| dt\, dx \\
&\leq |h| \int_0^1 \int_{K_{2j}} |\nabla u(y)| dy\, dt \leq |h|\, \|u\|_{W_1^1(\Omega)} \\
&\leq C|h|\, \|u\|_{W_p^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

wobei die Einbettung $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow W_1^1(\Omega)$ verwendet wurde, welche aus $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ folgt (beachte, dass Ω beschränkt ist). Da $C^\infty(\Omega) \cap W_p^1(\Omega)$ dicht in $W_p^1(\Omega)$ ist, folgt die obige Abschätzung für alle $u \in W_p^1(\Omega)$. Für hinreichend kleines h gilt somit

$$\|(E_0u)(\cdot + h) - (E_0u)(\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon \quad (u \in \mathcal{F}).$$

Nach Satz 6.11 ist $\mathrm{id} \in K(W_p^1(\Omega), L^1(\Omega))$.

Nach dem Einbettungssatz 6.6 ist $\mathrm{id} \in L(W_p^1(\Omega), L^{p_1}(\Omega))$. Da $p_1 > p$, folgt aus Lemma 6.10 b) $\mathrm{id} \in K(W_p^1(\Omega), L^p(\Omega))$, d.h. die Kompaktheit der Einbettung $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. □

6.13 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei $0 < \lambda < \mu < 1$. Dann sind die Einbettungen $C^\mu(\Omega) \hookrightarrow BUC(\Omega)$ und $C^\mu(\Omega) \hookrightarrow C^\lambda(\Omega)$ (wohldefiniert und) kompakt.*

Beweis. Die Abschätzung $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C^\mu(\Omega)}$ zeigt die Stetigkeit der Einbettung $C^\mu(\Omega) \hookrightarrow BUC(\Omega)$. Falls $\mathcal{F} \subset C^\mu(\Omega)$ beschränkt ist, so existiert ein $M > 0$ mit

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x-y|^\mu \quad (u \in \mathcal{F},\ x, y \in \Omega).$$

Damit ist $\mathcal{F}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm beschränkt und gleichgradig stetig, und nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\mathrm{id} \in K(C^\mu(\Omega), BUC(\Omega))$.

Die Stetigkeit der Einbettung $C^\mu(\Omega) \hookrightarrow C^\lambda(\Omega)$ ergibt sich aus den Abschätzungen

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \le \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu} \quad (x,y\in\Omega,\ |x-y|\le 1),$$
$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \le 2\|u\|_\infty \quad (x,y\in\Omega,\ |x-y|\ge 1).$$

Falls $\mathcal{F} \subset C^\mu(\Omega)$ beschränkt ist, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} &= \Big(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\Big)^{\lambda/\mu} |u(x)-u(y)|^{1-\lambda/\mu}\\ &\le M^{\lambda/\mu}|u(x)-u(y)|^{1-\lambda/\mu} \quad (x,y\in\Omega,\ u\in\mathcal{F}).\end{aligned}$$

Da $C^\mu(\Omega) \hookrightarrow BUC(\Omega)$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge, welche bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm konvergiert. Nach der obigen Abschätzung konvergiert diese Teilfolge auch bezüglich $\|\cdot\|_{C^\lambda(\Omega)}$, also ist $\mathrm{id} \in K(C^\mu(\Omega), C^\lambda(\Omega))$. □

6.14 Korollar. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, und seien $1 \le p < \infty$, $mp > n$ und $\lambda \in (0, m-\frac{n}{p})$, $\lambda < 1$. Dann ist die Einbettung $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^\lambda(\Omega)$ aus Satz 6.6 kompakt.*

Beweis. Wähle $\mu \in (0, m-\frac{n}{p})$ mit $\lambda < \mu < 1$. Nach dem Einbettungssatz 6.6 ist $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^\mu(\Omega)$ stetig, und nach Lemma 6.13 ist $C^\mu(\Omega) \hookrightarrow C^\lambda(\Omega)$ kompakt. Nach Bemerkung 6.9 ist $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^\lambda(\Omega)$ kompakt. □

6.15 Satz (Satz von Rellich-Kondrachov)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, und sei $1 \le p < \infty$, $j \in \mathbb{N}_0$.*

a) Falls Ω die Kegelbedingung erfüllt, ist die Einbettung $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow W_p^j(\Omega)$ kompakt.

b) Falls Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist und $mp > n$, so ist die Einbettung $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\Omega)$ kompakt für $\lambda \in (0, m-\frac{n}{p}) \cap (0,1)$. Insbesondere ist auch die Einbettung $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow BUC^j(\Omega)$ kompakt.

c) Für beliebiges beschränktes Gebiet Ω sind die Einbettungen in a) und b) kompakt, falls $W_p^{m+j}(\Omega)$ durch $W_{p,0}^{m+j}(\Omega)$ ersetzt wird.

Beweis. a) Für die Kompaktheit von $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow W_p^j(\Omega)$ genügt es wie im Beweis von Satz 6.3, den Fall $j = 0$ zu betrachten, und dieser ist gerade die Aussage von Satz 6.12.

b) Wieder genügt es, den Fall $j = 0$ zu betrachten, und dieser folgt aus Korollar 6.14. Die Kompaktheit von $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow BUC^j(\Omega)$ folgt aus der Stetigkeit von $C^{j,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow BUC^j(\Omega)$.

c) Sei $R > 0$ mit $B(0, R) \supset \overline{\Omega}$. Dann ist die Einbettung $E_0 \colon W_{p,0}^{m+j}(\Omega) \to W_p^{m+j}(B(0, R))$ stetig, wie man durch eine triviale Abschätzung für Testfunktionen sieht. Damit erhält man die Kette

$$W_{p,0}^{m+j}(\Omega) \xrightarrow{E_0} W_p^{m+j}(B(0,R)) \hookrightarrow W_p^j(B(0,R)) \xrightarrow{u \mapsto u|_\Omega} W_p^j(\Omega),$$

in welcher die mittlere Abbildung nach a) kompakt ist (da $B(0, R)$ die Kegelbedingung erfüllt). Analog folgt die Kompaktheit für die Einbettungen in b). $\square$

A. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung und reguläre Distributionen

Hier wird die Einbettung $L^1_{\text{loc}}(\Omega, E) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega, E)$ genauer untersucht. Im Folgenden seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und E ein Banachraum.

A.1 Satz. *Sei $f \in L^1(\mu, E)$. Dann ist die Abbildung*

$$F \colon \mathcal{A} \to E,\ A \mapsto \int_A f d\mu$$

σ-additiv, und die Totalvariation $|F| \colon \mathcal{A} \to [0, \infty)$,

$$|F|(A) := \sup \Big\{ \sum_{i=1}^N \|F(A_i)\|_E \colon A = \dot{\bigcup_{i=1}^N} A_i,\ A_i \in \mathcal{A} \Big\} \quad (A \in \mathcal{A}), \tag{1-1}$$

ist wohldefiniert. Es gilt die Gleichheit

$$|F|(A) = \int_A \|f\|_E d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Beweis. Die σ-Additivität von F ist Satz 3.9 c).

Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt für jede Partition $A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^N} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \|F(A_i)\|_E &= \sum_{i=1}^N \Big\| \int_{A_i} f d\mu \Big\| \le \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \|f\|_E d\mu \\ &= \int_A \|f\|_E d\mu \le \int_\Omega \|f\|_E d\mu < \infty, \end{aligned}$$

insbesondere ist $|F|(A) < \infty$, d.h. $|F|(A)$ ist wohldefiniert.

Zu zeigen ist noch $|F|(A) \ge \int_A \|f\|_E d\mu$. Dazu sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mu, E)$ mit $\int \|f - f_k\|_E d\mu \to 0$ $(k \to \infty)$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\int \|f - f_k\|_E d\mu < \varepsilon$ $(n \ge n_0)$.

Sei $A \in \mathcal{A}$. Für festes $n \ge n_0$ schreibe f_n in der Form $f_n = \sum_{j=1}^J a_j \chi_{B_j}$ mit $B_j \in \mathcal{A}$ und $a_j \in E$. Dann gilt für $\widetilde{A}_j := A \cap B_j$

$$\sum_{j=1}^J \Big\| \int_{\widetilde{A}_j} f_n d\mu \Big\| = \sum_{j=1}^J \mu(\widetilde{A}_j) \|a_j\|_E = \int_A \|f_n\| d\mu.$$

Nach Definition der Totalvariation existiert eine Partition $A_1, \dots, A_M$ von A so, dass

$$|F|(A) - \sum_{m=1}^{M} \Big\| \int_{A_m} f d\mu \Big\|_E < \varepsilon.$$

Da eine Verfeinerung der Partition die obige Summe höchstens vergrößert, sei $A_1, \dots, A_M$ o.E. eine Verfeinerung der Partition

$$A = \widetilde{A}_1 \,\dot\cup \dots \dot\cup\, \widetilde{A}_J \,\dot\cup\, \Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \widetilde{A}_j\Big).$$

Damit gilt auch

$$\sum_{m=1}^{M} \Big\| \int_{A_m} f_n d\mu \Big\|_E = \int_A \|f_n\|_E d\mu.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \Big| |F|(A) - \int_A \|f_n\|_E d\mu \Big| &= \Big| |F|(A) - \sum_{m=1}^{M} \Big\| \int_{A_m} f_n d\mu \Big\|_E \Big| \\ &\le \Big| |F|(A) - \sum_{m=1}^{M} \Big\| \int_{A_m} f d\mu \Big\|_E \Big| + \sum_{m=1}^{M} \Big\| \int_{A_m} (f_n - f) d\mu \Big\|_E \\ &\le \varepsilon + \sum_{m=1}^{M} \int_{A_m} \|f_n - f\|_E d\mu = \varepsilon + \int_A \|f_n - f\|_E d\mu < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt $|F|(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A \|f_n\|_E d\mu = \int_A \|f\|_E d\mu$. □

A.2 Korollar. *Sei $f \in L^1(\mu, E)$ mit $\int_A f d\mu = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt $f = 0$ μ-fast überall.*

Beweis. Nach Satz A.1 gilt $\int_\Omega \|f\|_E d\mu = |F|(\Omega)$. Nach Definition der Totalvariation folgt aus der Voraussetzung $|F|(\Omega) = 0$, da in (1-1) gilt $F(A_i) = \int_{A_i} f d\mu = 0$. Somit ist $\|f\|_E = 0$ μ-fast überall, d.h. $f = 0$ μ-fast überall. □

Wir betrachten nun vektorwertige reguläre Distributionen. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, und $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wie im skalaren Fall definieren wir $L^1_{\text{loc}}(\Omega, E)$ als die Menge aller (Äquivalenzklassen von) Funktionen $f\colon \Omega \to E$, für welche $f\chi_K \in L^1(\Omega, E)$ für alle $K \subset\subset \Omega$ gilt.

A.3 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, E)$ mit $\int_\Omega \varphi(x) f(x) dx = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Dann gilt $f = 0$ fast überall.*

Beweis. Sei $U \subset \Omega$ offen mit $\overline{U} \subset\subset \Omega$. Dann gilt $f|_U \in L^1(U, E)$. Sei $K \subset\subset U$. Mit Hilfe des Friedrichschen Glättungsoperators sieht man, dass eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(U)$ existiert mit $\varphi_k \to \chi_K$ punktweise und $0 \le \varphi_k \le 1$. Mit majorisierter Konvergenz folgt

$$\int_K f(x)dx = \int_U \chi_K(x) f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_U \varphi_k(x) f(x)dx = 0.$$

Da $\{K : K \subset\subset U\}$ ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(U)$ ist, folgt $\int_A f(x)dx = 0$ $(A \in \mathcal{B}(U))$. Nach Korollar A.2 gilt $f = 0$ fast überall in U. Da U beliebig war, erhält man $f = 0$ in Ω. □

A.4 Korollar. *Die Abbildung* $L^1_{\text{loc}}(\Omega, E) \to \mathscr{D}'(\Omega, E)$, $f \mapsto [f]$ *ist wohldefiniert, linear und injektiv.*

Beweis. Man sieht sofort, dass $[f] \in \mathscr{D}'(\Omega, E)$ gilt, und die Injektivität folgt aus dem Fundamentallemma. □

B. Faltung und Dichtheitsaussagen

B.1 Definition. Seien $f\colon \mathbb{R}^n \to E$ stark messbar und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar mit $y \mapsto \varphi(y)f(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann definiert

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)f(x-y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

die Faltung $\varphi * f$ von φ und f.

Wie im skalaren Fall sieht man:

B.2 Lemma. *a) Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ gilt $\varphi * f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ und*

$$\|\varphi * f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,E)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,E)}.$$

b) Für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^q(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, gilt $\varphi * f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ und

$$\|\varphi * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,E)} \leq \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,E)}.$$

c) Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$ und $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt ist $\varphi * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$.

d) Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$ und $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ist $\varphi * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$.

e) Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ mit $\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha\varphi) * f$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^n)$.

Der Friedrichssche Glättungsoperator ist über die Faltung definiert: Sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi(x)dx = 1$. Dann definiert man $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ und für $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, E)$ den Glättungsoperator $T_\varepsilon u := \varphi_\varepsilon * u$ $(\varepsilon > 0)$.

Wörtlich wie im skalaren Fall kann man unter Verwendung dieses Glättungsoperators folgende Dichtheitsaussage zeigen:

B.3 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt $\mathscr{D}(\Omega, E)$ dicht in $L^p(\Omega, E)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J. F.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 2003.

[2] Amann, H., Escher, J.: Analysis III. Birkhäuser, Basel 2001.

[3] Amann, H.: Vector-valued distributions and Fourier multipliers. `http://user.math.uzh.ch/amann/files/distributions`. pdf-Datei, 2003.

[4] Bergh, J., Löström, J.: Interpolation spaces. An introduction. Springer-Verlag Berlin 1976.

[5] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[6] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[7] Heuser, H.: Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung. Teuber-Verlag 2006.

[8] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[9] Schmeißer, H. J.: Vector-valued Sobolev and Besov spaces. Seminar Analysis, Karl-Weierstraß-Institute of Mathematics 1985/86. Teubner, Berlin 1985/86.

[10] Triebel, H.: Interpolation theory, function spaces, differential operators. North Holland, 1978.

[11] Walter, W.: Einführung in die Theorie der Distributionen. Bibliographisches Institut – Wissenschaftsverlag 1974.

[12] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.