Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

Übungsblatt 2

Aufgabe 6 (Zur Existenz von überabzählbar vielen linear unabhängigen Vektoren in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum). Zeigen Sie, dass $\{e^{(z)} : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ mit $e_n^{(z)} := z^n$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist.

Aufgabe 7 (Zur Existenz nichtstetiger linearer Funktionale). Für $E = \ell^2(\mathbb{N})$ sei F der Untervektorraum

$$F = \{x \in E : x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei F' ein algebraisches Komplement von F in E, d.h. $F + F' = E$, $F \cap F' = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ für $x = y + y'$ mit $y \in F$ und $y' \in F'$ wohldefiniert, linear und nicht stetig ist.

Aufgabe 8 (Adjungierter Operator). Sei E ein Hilbertraum und $A \in L(E)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in E$ genau ein $x^* \in E$ gibt mit $\langle Ay, x\rangle = \langle y, x^*\rangle$ für alle $y \in E$ und $\|x^*\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Zeigen Sie weiter:
(i) $x \mapsto x^* =: A^*x$ definiert $A^* \in L(E)$.
(ii) $A \mapsto A^*$ ist konjugiert linear.
(iii) $A^{**} = A$.
(iv) $\|A\| = \|A^*\|$.

Aufgabe 9. Sei $E \neq \{0\}$ ein normierter Raum und $P, Q : E \to E$ lineare Abbildungen mit $PQ - QP = \mathrm{id}_E$. Zeigen Sie, dass P und Q nicht beide gleichzeitig stetig sein können.
[Hinweis: Betrachten Sie $P^nQ - QP^n = nP^{n-1}$.]

Aufgabe 10. Beweisen Sie Korollar 2.8 der Vorlesung.

Aufgabe 11.
a) Beweisen Sie, dass ein Hilbertraum mit abzählbarer Orthonormalbasis separabel ist.
b) Zeigen Sie, dass in einem separablen Hilbertraum alle Orthonormalbasen abzählbar sind.

Bem.: Die Aussage von Teil b) gilt ganz allgemein: In einem Hilbertraum haben alle Orthonormalbasen dieselbe Kardinalität. Diese heißt dann die Dimension des Hilbertraums.

Abgabetermin: Dienstag, 25. 5. 2004, vor der Vorlesung.