Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

Übungsblatt 3

Aufgabe 12. Für $1 \leq p < \infty$ ist der Banachraum $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N};\mathbb{C})$ definiert durch

$$\ell^p := \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p := \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \Big)^{1/p} < \infty \Big\}.$$

Analog ist ℓ^∞ definiert durch $\ell^\infty := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$.
a) Zeigen Sie, dass ℓ^p für $1 \leq p < \infty$ separabel ist.
b) Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht separabel ist. (Betrachten Sie 0-1-wertige Folgen.)

Aufgabe 13. Sei $c_0 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : x_n \to 0 \ (n \to \infty)\}$ mit der Supremumsnorm versehen. Sei $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Man zeige:
a) Durch $\tilde{f}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n x_n$ wird ein stetiges lineares Funktional auf c_0 mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|_1$ definiert.
b) Die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^1 auf $(c_0)'$ (also insbesondere surjektiv).

Aufgabe 14 (Shift-Operatoren). Der Operator S in ℓ^2 sei definiert durch $Se^{(n)} := e^{(n+1)}$, wobei $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ die kanonische Orthonormalbasis in ℓ^2 sei. Man bestimme $\|S\|$, S^*, SS^*, S^*S und $\|S^*\|$. Was ist $\ker S$, $R(S)$, $\ker S^*$, $R(S^*)$?

Aufgabe 15. Beweisen Sie Korollar 5.6 der Vorlesung.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass es ein stetiges lineares Funktional f auf $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ gibt, für das

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ gilt. (Hinweis: Fortsetzungssatz von Hahn-Banach.)

Abgabetermin: Donnerstag, 3. 6. 2004, vor der Vorlesung.