Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

Übungsblatt 4

Aufgabe 17 (8 Punkte). Sei E ein unendlich-dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie, dass der Abschluss der Einheitssphäre $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ in der schwachen Topologie die Einheitskugel $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ist.

Hinweis: a) Eine Umgebungsbasis von $x \in E$ in der schwachen Topologie ist gegeben durch alle Mengen der Form

$$U(f_1, \dots, f_n, \varepsilon) := \{y \in E : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \ (i = 1, \dots, n)\}$$

mit $f_1, \dots, f_n \in E',\ \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}$.
b) Betrachten Sie $x + \lambda z$ mit $z \in H := \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$ für $f_1, \dots, f_n \in E'$. Zeigen Sie, dass $\dim E/H < \infty$ und damit $\dim H = \infty$ (und insbesondere $H \neq \{0\}$) gilt.

Aufgabe 18. Sei E ein Hilbertraum. Es bezeichne E_w bzw. E_n den Raum E versehen mit der schwachen bzw. der Normtopologie. Zeigen Sie, dass ein linearer Operator $T : E_w \to E_n$ genau dann stetig ist, wenn $R(T)$ endlich-dimensional ist.

Hinweis: Beachten Sie Hinweis b) von Aufgabe 17 mit $x = 0$.

Aufgabe 19 (Multiplikationsoperatoren, Teil 1). Sei $E = L^2([0, 1])$ und $T \in L(E)$ definiert durch $Tf(t) := t \cdot f(t)$. Bestimmen Sie $\rho(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

Aufgabe 20 (Multiplikationsoperatoren, Teil 2). Sei $E = C([0, 1])$, $\phi \in E$ und $T \in L(E)$ definiert durch $Tf(t) := \phi(t) \cdot f(t)$. Bestimmen Sie $\sigma_p(T)$ und zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von T unendliche Vielfachheit haben (d.h. es gilt $\dim \ker(T - \lambda) = \infty$ für $\lambda \in \sigma_p(T)$).

Abgabetermin: Dienstag, 15. 6. 2004, vor der Vorlesung.