Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

# Übungsblatt 5

**Aufgabe 21 (Approximative Eigenwerte).** Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(E)$. Die Menge $\sigma_{\text{ap}}(A)$ der approximativen Eigenwerte von $A$ ist definiert als die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ gibt mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(A-\lambda)x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass $\sigma_{\text{ap}}(A) \subset \sigma(A)$ gilt.

**Aufgabe 22 (Shift-Operatoren Teil 2).** Sei $S$ der Rechtsshift in $\ell^2(\mathbb{Z})$, d.h. $S(e^{(n)}) = e^{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ für die kanonischen Einheitsvektoren $e^{(n)} = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{Z}}$. Bestimmen Sie das Spektrum von $S$ (d.h. $\rho(S), \sigma_p(S), \sigma_c(S)$ und $\sigma_r(S)$).

**Aufgabe 23 (Integraloperatoren).** Sei $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:
a) Durch

$$Kf(s) := \int_0^1 G(s,t)f(t)dt \quad (f \in C([0,1]))$$

wird ein Operator $K \in L(C([0,1]))$ definiert. Es gilt

$$\|K\| = \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |G(s,t)|dt.$$

b) Der Operator $K$ ist kompakt. (**Hinweis:** Approximation durch Treppenfunktionen.)

**Aufgabe 24 (Volterra-Operator).** Nun sei in der Situation von Aufgabe 23 speziell $G(s,t) = 0$ für $s \le t$.
a) Man betrachte die Volterrasche Integralgleichung

$$f(s) = g(s) + \int_0^s G(s,t)f(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass $\|K^n\| \le \frac{\mu^n}{n!}$ mit $\mu := \sup_{s\ge t} |G(s,t)|$ gilt und folgern Sie daraus, dass die Volterrasche Integralgleichung für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt.
b) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(K)$ von $K$.

Abgabetermin: Donnerstag, 24. 6. 2004, vor der Vorlesung.