Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

Übungsblatt 6

Aufgabe 25 (2 Punkte). Seien E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $A, B \in L(E)$. Zeigen Sie:
a) Falls $1 - AB$ invertierbar ist, so ist $1 + B(1 - AB)^{-1}A$ das Inverse von $1 - BA$.
b) $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Aufgabe 26. Seien E, F Banachräume und $A \in L(E, F)$. Zeigen Sie, dass $R(A)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|Ax\| \geq C \operatorname{dist}(x, \ker A) \quad (x \in E).$$

(Betrachten Sie $E/\ker A$.)

Aufgabe 27. Seien E, F Banachräume und $A \in L(E, F)$. Zeigen Sie:
a) Falls es einen abgeschlossenen komplementären Unterraum $M \subset E$ zu $R(A)$ gibt, ist $R(A)$ abgeschlossen.
b) Falls $\operatorname{codim} R(A) < \infty$, ist $R(A)$ abgeschlossen.

Hinweis zu a): Betrachten Sie $A_0 : E \oplus M \to F,\ (x, y_0) \mapsto Ax + y_0$.

Aufgabe 28 (6 Punkte). Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Definiere für $A \in L(E)$ die Bezeichnung

$$A \geq 0 :\Longleftrightarrow A = A^*,\ \langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad (x \in E).$$

a) Seien $A, B \in L(E)$ mit $A = A^*$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Zeigen Sie $A^2B = BA^2 \geq 0$.
b) Seien $A, B \in L(E)$ mit $A \geq 0$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Zeigen Sie $AB \geq 0$.

Hinweis zu b): Man kann $\|A\| = 1$ annehmen. Betrachten Sie die Folge A_n mit $A_1 := A$ und $A_{n+1} := A_n - A_n^2$ und zeigen Sie $0 \leq A_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \to A \quad (n \to \infty)$$

in der starken Operatortopologie.

Abgabetermin: Donnerstag, 1. 7. 2004, vor der Vorlesung.