Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

Übungsblatt 7

Aufgabe 29. Beweisen Sie Lemma 10.14 b) der Vorlesung.

Aufgabe 30 (Nichtorthogonale Projektionen, Teil 1). Sei E ein Banachraum, und seien $M_1, M_2 \subset E$ lineare Teilräume mit $E = M_1 + M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Sei $P : E \to E$ definiert durch $Px := x_1$, wobei $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$.
Zeigen Sie: P ist genau dann stetig, wenn M_1 und M_2 beide abgeschlossen sind.

Aufgabe 31. Sei E ein Hilbertraum und $P \in L(E) \setminus \{0\}$ eine (nicht notwendig orthogonale) Projektion, d.h. $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass P genau dann eine orthogonale Projektion ist, falls $\|P\| = 1$.

Hinweis. Wählen Sie ein $x \in E$ mit $Px \neq 0$ und $(1-P)x \neq 0$ und betrachten Sie die Einschränkung von P auf den von Px und $(1-P)x$ aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 32 (Ein Störungssatz.) Sei E ein Hilbertraum und seien $A, B \in L(E)$ mit $A - B$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$ gilt. (D.h. eine kompakte Störung des Operators A läßt die Punkte des Spektrums, die nicht Eigenwerte sind, unverändert.)

Abgabetermin: Donnerstag, 8. 7. 2004, vor der Vorlesung.