Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

Funktionalanalysis
Sommersemester 2004

# Übungsblatt 8

**Aufgabe 33.** Sei $S$ der Linksshift in $\ell^2(\mathbb{Z})$, d.h. $S(e^{(n)}) = e^{(n-1)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ für die kanonischen Einheitsvektoren $e^{(n)} = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{Z}}$. Der Operator $S \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ ist bekanntlich unitär mit $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (vgl. Aufgabe 22). Weiter sei $C \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ definiert durch

$$C(e^{(n)}) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq 1, \\ -e^{(0)} & \text{falls } n = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $C$ ist kompakt, und $\sigma(S + C) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Eine kompakte Störung kann das Spektrum eines Operators also sehr wesentlich verändern. Vgl. auch Aufgabe 32.

**Aufgabe 34.** Seien $a < b$ und $\alpha, \beta \in BV([a, b])$. Ferner seien $f, g \in C([a, b])$.
a) Es gelte $\alpha(\lambda) = \int_a^\lambda f(\mu)d\beta(\mu)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b g(\lambda)d\alpha(\lambda) = \int_a^b f(\lambda)g(\lambda)d\beta(\lambda).$$

b) Nun sei $\alpha$ monoton wachsend und $\varphi\colon [A, B] \to [a, b]$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass

$$\int_A^B (f \circ \varphi)d(\alpha \circ \varphi) = \int_a^b f d\alpha.$$

**Aufgabe 35.** Beweisen Sie Lemma 11.5 der Vorlesung.

**Aufgabe 36.** Sei $E = L^2([0, 1])$, und für $x \in E$ sei

$$(E_\lambda x)(t) := \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ \chi_{[0,\lambda]}(t)x(t), & \lambda \in [0, 1), \\ x(t), & \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_0^1 \lambda dE_\lambda$.

Abgabetermin: Donnerstag, 15. 7. 2004, vor der Vorlesung.